

7. Инструкция по составлению плана самоконтроля для предприятия розничной торговли [Электронный ресурс]: офиц. сайт. – Режим доступа: http://www.vet.agri.ee/static/body/files/1326.Jaemyygiettev6tte_enekontrolliplaani_juhend_%28venekeel%29.pdf. – Назва з екрана.

УДК 51-76

ГЕОМЕТРИЯ ЭРИТРОЦИТА

Зуб В. В., соискатель, **Кириллов В. Х.,** д-р техн. наук, профессор,
Кузаконь В. М., канд. физ.-мат. наук, доцент

Одесская национальная академия пищевых технологий, г. Одесса

Вращением кривой Персея построена поверхность эритроцита, определена его площадь поверхности и объём. В реальной крови они распределены по нормальному закону. Проведено сопоставление численных характеристик объёмов эритроцитов (по данным Чижевского и Вишневого) с эритроцитарными показателями гематологического анализатора здорового человека (по данным гематологической лаборатории 411 госпиталю).

Erythrocyte surface has been constructed by revolving a spiric section, and its area and volume have been determined. In real blood RBC are normally distributed. Numerical data on corpuscular volumes (according to Chizhevsky and Vishnevsky) have been checked against RBC factors in normal human haematology panel (according to the haematology laboratory in Hospital No. 411).

Ключевые слова: эритроцит, площадь поверхности, объём, нормальное распределение, гематологический анализатор.

Постановка задачи. Основу нашей жизни составляют воздух, вода и пища. Без этих факторов организм существовать не может, но если посмотреть по степени важности, то без воздуха человек может жить не более 3...5 минут (после чего наступают необратимые процессы), без воды от 3 до 7 суток, без пищи 30 и более дней. Таким образом, воздух имеет огромное первостепенное значение для состояния здоровья человека.

Основная функция крови — транспортная, с одной стороны она связана с переносом кислорода и питательных веществ ко всем органам человеческого организма, а с другой — участие в выведении углекислого газа и токсичных продуктов переработки органов (печени, почек и т. д.). Эритроциты (красная кровь), входящие в состав крови, переносят от легких к тканям организма кислород, а обратно CO_2 . Кровь представляет собой связующее звено между всеми системами организма, на ее составе качественно и количественно отражаются любые патологические изменения, происходящие в организме человека. Эритроциты (красные кровяные тельца) крови также чутко реагируют на малейшие отклонения от нормы при функционировании всех органов человека и это, прежде всего, отражается на морфологических показателях (форма, размер, цветность и наличие некоторых включений) красной крови (эритроцитов).

В статье рассматриваются морфологические особенности эритроцита, связанные с его геометрией (форма, диаметр, боковая поверхность и объём). В связи с газообменом площадь боковой поверхности эритроцита является более важной, нежели его объём. Экспериментально определить площадь боковой поверхности не представляется возможным, а поэтому эту площадь вычисляют теоретическими методами.

Изучения геометрических параметров эритроцитов человека издавна привлекало внимание многих учёных мировой науки. Нормальный эритроцит человеческой крови имеет форму двояковогнутой лепёшки с утолщённым торовидным краем [1]. Таким эритроцит чаще всего представляется под электронным микроскопом, увеличенный в 20000 раз. Эту форму мы примем в дальнейшем исследовании (рис. 1).

Эритроцит может быть рассмотрен как тело вращения вокруг некоторой оси плоской кривой линии, форма которой определяется многочисленными экспериментальными данными, найденными многими авторами [1].

Примем ось вращения линии контура эритроцита за ось Oy . Горизонтальная плоскость, проходящая через центр эритроцита, будет плоскостью симметрии. Пересечём профиль эритроцита плоскостью, проходящей через ось вращения. Прямоугольнику, по которой пересечётся эта плоскость с плоскостью симметрии, примем за ось Ox . Кривая контура профиля эритроцита будет симметрична относительно осей x и y .

При исследовании геометрии эритроцита большинство исследователей исходили из следующих значений реперных точек. По многочисленным экспериментальным данным толщина эритроцита достигает минимума по оси вращения Oy . Здесь толщина равна $\frac{1}{8}D$, где $D=AB$ — диаметр эритроцита. На расстоянии $\frac{1}{3}D$ от оси вращения высота эритроцита достигает максимума, который равен четверти диаметра.

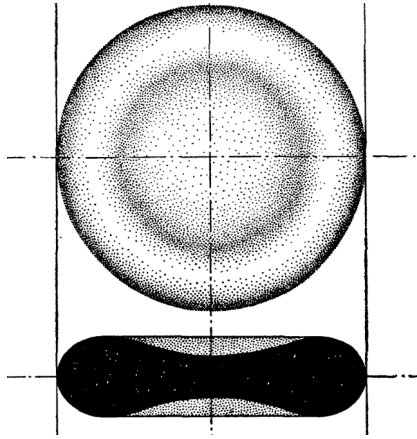


Рис. 1 — Форма нормального эритроцита (нормацита)

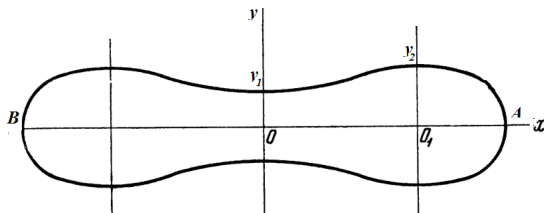


Рис. 2 — Профиль эритроцита

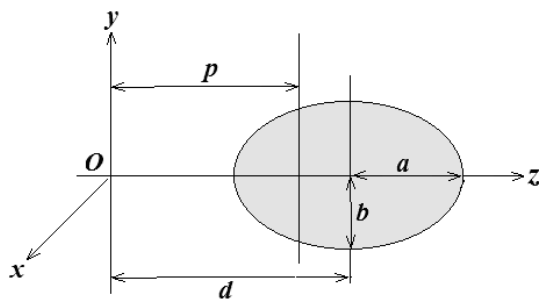


Рис. 3 — Образование кривых Персея

Целью данного исследования является теоретическое определение площади поверхности и объема эритроцита, исходя из простейших предпосылок описания контура нормоцита (эритроцит здорового человека), используя известные кривые четвертого порядка. В последних работах по геометрии эритроцита [1—2] для описания формы эритроцита использовались кривые шестого [1] и четвертого [2] порядка общего вида. В последней работе, правда, отправные точки несколько искажены. По нашему мнению профиль нормоцита следует искать из семейства кривых Персея [5], а именно как линии пересечения поверхностью эллиптического тора с плоскостью параллельной его оси $z=p$,

$$y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} \left(\sqrt{x^2 + z^2} - d \right)^2 \quad (1)$$

геометрический смысл параметров a, b, p и d представлен на рис. 3 (a, b — полуоси эллипса; d — расстояние от начала координат до центра эллипса; p — расстояние от оси тора до секущей плоскости)/

Мы исходили из тех соображений, что сечения тора плоскостью $z=p$ имеют вид профиля эритроцита.

Таким образом, профиль эритроцита в первом квадранте координатной плоскости xOy (рис. 2) определяется уравнением

$$y = c \sqrt{a^2 - \left(\sqrt{x^2 + p^2} - d \right)^2}, \quad \left(c = \frac{b}{a} \right), \quad (2)$$

Величины a, b, p и d определяются из условий (в безразмерных координатах, $D=2R=2$)

$$1) \text{ при } x=0, \quad y_{\min} = \frac{1}{8}; \quad (3)$$

$$2) \text{ при } x = \frac{2}{3}, \quad y = y_{\max}; \quad (4)$$

$$3) \text{ при } x = \frac{2}{3}, \quad y = \frac{1}{4}; \quad (5)$$

$$4) \text{ при } x=1, \quad y=0. \quad (6)$$

Проводя расчёты, получены следующие значения параметров:

$$a=0,150662; \quad d=1,768398; \quad p=1,637922; \quad c=1,659376; \quad b=a \cdot c.$$

Расчёт в декартовых координатах (2) даёт следующий график профиля нормоцита (рис. 4).

А поверхность вращения вокруг оси симметрии в цилиндрических координатах имеет следующую форму (рис. 5) — изображена верхняя половина эритроцита.

Теперь перейдём к определению площади и объема эритроцита. Следует признать, что роль поверхности и объема эритроцита в современной физиологии ещё не достаточно оценена в связи с процессами газообмена, а также с процессами деформации эритроцита при проникновении его в капиллярное русло (диаметр капилляра вдвое меньше чем диаметр эритроцита).

Для определения площади поверхности эритроцита воспользуемся известной формулы высшей математики

$$S = 4\pi \int_0^1 x \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx, \quad (7)$$

где $y = y(x)$ — определяется из соотношения (2). Данный интеграл является несобственным, та как при $x=1$, $y'(1) = \infty$.

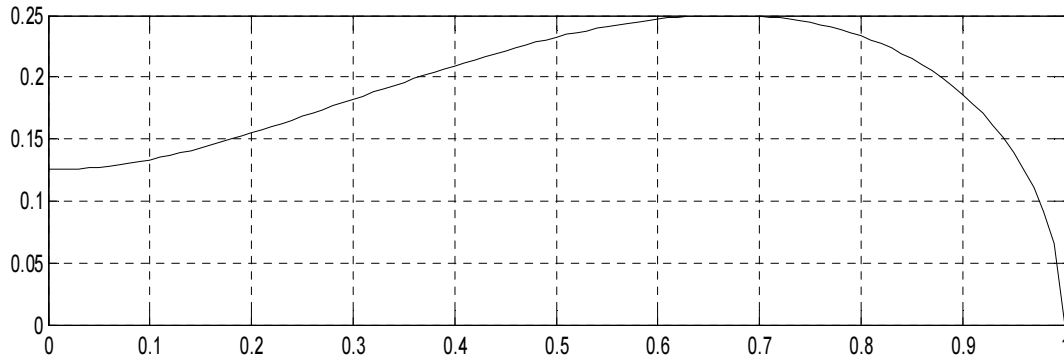


Рис. 4 — График контура эритроцита

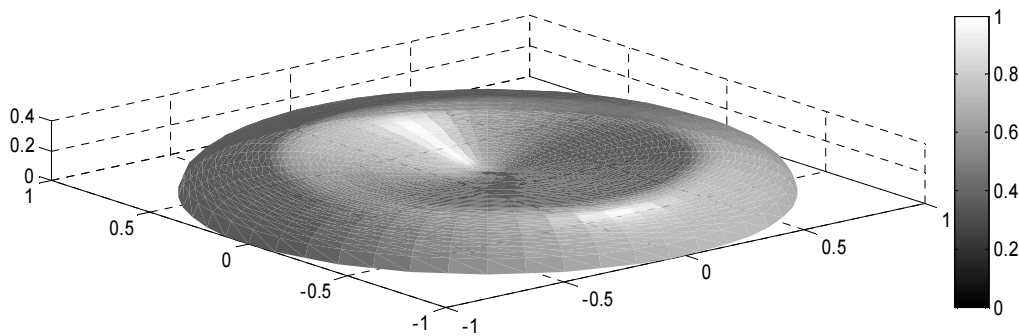


Рис. 5 — Верхняя половина поверхности вращения эритроцита

В связи с этим уравнение профиля эритроцита $y = y(x)$ представим в параметрической форме

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{(d + a \cos t)^2 - p^2} \\ y(t) = b \sin t \quad (b = 0,25) \end{cases} \quad (8)$$

В результате
$$S = 4\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = 4\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t) \left((d + a \cos t)^2 - b^2 p^2 \cos^2 t \right)} dt,$$

где $\alpha = 0$, $\beta = \pi - \arcsin \frac{1}{8b}$. Проводя вычисление данного интеграла численным методом (в среде MatLab), получено следующее значение площади поверхности нормцита — $S = 8,3404$.

Объём эритроцита определяем по формуле $V = 4\pi \int_0^1 x y(x) dx$, численный расчёт этого интеграла даёт значение $V=1,2799$.

Если принять, что диаметр эритроцита человека в среднем равен $7,55 \mu$ (микрон), то соответственно $S=118,8559 \mu^2$ и $V=68,8536 \mu^3$.

Связь площади поверхности и объёма с диаметром эритроцита такова:

$$S=8,3404 \cdot R^2=2,0851 \cdot d^2; V=1,2799 \cdot R^3=0,16 \cdot d^3. \quad (9)$$

По данным других авторов А. Л. Чижевский [1] и В. Н. Власов [2] площадь поверхности и объём соответственно равны: $S=108,679 \mu^2$; $V=62,955 \mu^3$; $S=113,9157 \mu^2$; $V=69,2273 \mu^3$.

Расхождения с полученными нами данными связана с различными подходами при аппроксимации контура эритроцита. У А. Л. Чижевского аппроксимация представляется кривой шестого порядка, а у В. Н. Власова — кривой четвёртого порядка, с некоторым искажением реперных точек, нами же были использованы классические кривые Персея (сечения эллиптического тора).

Рассмотрим, в какой мере полученные теоретические расчёты согласуются с экспериментальными данными при анализе крови.

Наиболее важным геометрическим размером эритроцита является его диаметр (наибольший размер).

По результатам тщательных измерений около 4000 эритроцитов здоровых людей А. Л. Чижевским [1] следующие статистические данные:

Таблица 1 — Статистические данные эритроцитов здоровых людей [1]

d_i, μ	5,5	6,5	8,5	8,5	9,5
n_i	0,0291	0,0689	0,7601	0,1109	0,0309

В таблице 1: d_i — диаметр; n_i — частота.

Среднее значение диаметра (математическое ожидание) равно 7,545 μ .

По данным Вишневого (15300 измерений эритроцитов 100 больных туберкулёзом и 1799 измерений 19 здоровых) [1]:

Таблица 2 — Статистические данные здоровых и больных туберкулёзом людей [1]

d_i, μ	5,75	6,25	6,75	7,25	7,75	8,25	8,75	9,25
n_i	0,019	0,018	0,011	0,337	0,477	0,058	0,029	0,051

В таблице 2 среднее значение диаметра (математическое ожидание) равно 7,64 μ .

В настоящее время большинство показателей крови получают на автоматических гематологических анализаторах [3], которые в состоянии одновременно определять от 5 до 24 параметров. Все эти данные являются объёмными, отнесённые к единице объёма исследуемой крови. Важнейшими эритроцитарными показателями крови следующие: гематокрит (HTC) — отражает, какой объём крови занимают эритроциты (норма 39...49 % (мужчины), 35...45 % (женщины)); число эритроцитов (RBC) (норма, клеток/мкл, $4,3...6,2 \cdot 10^6$ (мужчины), $3,8...5,5 \cdot 10^6$); средний объём эритроцита (MCV) (норма — $80...100 \text{ мкм}^3$); $RDW-SD, \mu$ (μ — 1 микрон=1 мкм) — среднее квадратичное отклонение выборки (норма — 37...46 μ); $RDW-CV, \%$ — коэффициент вариации (норма — 11,5...14,5 %). Последние два показателя свидетельствуют о том, насколько эритроциты отличаются между собой по размерам.

По гематологическим измерениям средний объём эритроцита вычисляется отношением гематокрита к числу эритроцитов, т. е. в предположении плотной упаковки последних. Объём эритроцита нормальной крови, равный $88 \mu^3$, считается в современной гематологии наиболее точным объёмом эритроцита. Это значение вошло во многие руководства по гематологии, общей физиологии и лабораторной практике. Отклонения от $V=88 \mu^3$ в ту или другую сторону считаются патологическими.

Данная цифра значительно отличается от полученного нами теоретического значения $V=68,85 \mu^3$. Это объясняется тем, что получить истинный объём красной крови экспериментально установить невозможно. Пока эритроциты сохраняют свою индивидуальную форму, пока они совершают хаотическое броуновское движение, пока между ними действуют силы электрического отталкивания (эритроциты имеют отрицательный заряд), пока все эритроциты не плотно прижаты один к другому (а это возможно при их деформации), до тех пор эмпирические методы не могут дать истинное значение объёма эритроцита, ибо между эритроцитами всегда имеются зазоры. Определённая многими авторами [1] эмпирическая величина объёма эритроцита $V_{эф}=88 \mu^3$, есть, по существу, эффективный объём пространства эритроцита. Таким образом, теоретический объём эритроцита по нашим данным равен $V=0,7824 \cdot V_{эф}$, а диаметр соответственно — $d=1,6973 \cdot \sqrt[3]{V_{эф}}$ (по анализам крови $V_{эф}=MCV$). Эффективный объём пространства эритроцита равен сумме объёма эритроцита и объёма пространства зазоров между эритроцитами: $V_{эф}=V+\Delta V$, таким образом, объём пространства зазоров в красной крови составляет 27,8 % от объёма эритроцита ($\Delta V=0,2781 \cdot V$).

Гематологические анализаторы автоматизированного анализа крови помимо количественной информации представляют также визуальное отображение (гистограмму) распределения эритроцитов по объёму. После обработки данных, анализатор строит кривую, которая свидетельствует о том, что в исследуемом объёме красной крови объём эритроцита, как случайная величина, распределена по нормальному (гауссовому) закону

$$f(V) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(V-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (10)$$

где $f(V)$ — плотность распределения вероятностей, a — математическое ожидание и σ — среднее квадратическое отклонение величины V . Диаметр эритроцита $d=1,6973 \cdot \sqrt[3]{V}$ также распределён по нормальному закону.

Что касается математического ожидания случайной величины V в выборке, то оно для нормоцита равно среднему значению $a=V=MCV=88 \mu$.

Рассмотрим теперь вопрос определения среднеквадратического отклонения σ . Для нормального распределения случайной величины d (диаметр эритроцита) в выборке, по данным в табл. 1 и 2, соответственно получаем:

$a=7,5449 \mu$, $D(d)=0,4226 \mu^2$ (дисперсия), $\sigma(d)=0,6501 \mu$;

$a=7,64 \mu$, $D(d)=0,3584 \mu^2$ (дисперсия), $\sigma(d)=0,5987 \mu$.

На основе эритроцитарной гистограммы анализаторы дают ещё два показателя отклонения величины от среднего значения a : $RDW-CV, \%$ — коэффициент вариации и $RDW-SD, \mu$ — среднее квадратическое отклонение, причём получаемые различными методами. В табл. 3 представлены эритроцитные показатели гематологического анализатора для 6 здоровых людей.

Таблица 3 — Эритроцитные показатели

MCV, μ^3	71,5	77,42	87	87,5	90,7	92,4
$RDW-SD, \mu^3$	33,2	35,92	36,6	60,1	42,8	38,9
$RDW-CV, \%$	13,1	12,4	11,6	21,9	13,2	11,7

Статистическая обработка этих данных [4], с учётом нормального распределения случайной величины V , дала следующие результаты:

$$\sigma = 1,9739 \cdot RDW - SD, \quad (11)$$

т.е. показатель $RDW-SD$ связан со средним квадратичным отклонением σ , а второй показатель

$$RDW - CV = 27,86 \cdot \frac{RDW - CD}{MCV}, \% \quad (12)$$

поскольку $RDW - CV = \frac{SD}{MCV} \cdot 100 \%$ (по методике расчёта показателя $RDW-CV$ гематологическим анализатором), где SD — стандартное среднеквадратическое отклонение объёма эритроцита от его среднего значения.

Всякое отклонение указанных эритроцитных показателей HTC , RBD , MCV , от нормы, в том числе и показателей RDW — среднего разброса объёмов эритроцита от среднего значения, указывает на наличие гематологических заболеваний и дают важную информацию о состоянии здоровья человека.

Выводы.

1. Значения площади поверхности и объёма эритроцита позволяют в дальнейшем оценить количественные меры деформации эритроцита и транскапиллярный газообмен.

2. Статистические показатели при обработке эритроцитных гистограмм гематологических анализаторов позволяют проводить оценку динамики здоровья человека при лечебном питании.

Литература

1. Чижевский, А. Л. Структурный анализ движущейся крови [Текст] / А. Л. Чижевский. — М.: АН СССР, 1959. — 475 с.
2. Власов, В. Н. Вычисление некоторых показателей эритроцитов человека [Электронный ресурс] : [Веб-сайт]. — Электронные данные. — Режим доступа: <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001b/00161328.htm> — 30.03.2015) — Заглавие с экрана.
3. Луговская, С. А. Лабораторная гематология [Текст] / С. А. Луговская, В. Т. Морозова, М. Е. Почтарь, В. В. Долгов. — М.: Триада, 2006. — 218 с.
4. Гланц, С. Медико-биологическая статистика [Текст]: монография / пер. с англ.: Ю. А. Данилова; под ред. Н. Е. Бузикашвили, Д. В. Самойлова. — М.: Практика, 1999. — 459 с.
5. Зуб, В. В. Аналитическая аппроксимация геометрической формы эритроцита [Текст] / В. В. Зуб, В. Х. Кириллов, В. М. Кузаконь // Геометрия в Одессе-2015: тез. докл. международной конференции, 25–31 мая 2015 г, г. Одесса. — О., [б. и.], 2015 — С. 74.