

## ТЕРМОДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 66.048.3-932.2

### Математичне моделювання перехідних процесів живучої системи керування ректифікаційною установкою

Ю. А. Ірлик

Державний університет інтелектуальних технологій і зв'язку, вул. Кузнечна, 1, Одеса, 65023, Україна

✉ e-mail: lutsyk.yulia287@gmail.com

У статті розглядаються перехідні процеси в системі керування ректифікаційною установкою, які є важливими для забезпечення стабільності, ефективності та енергоощадності промислових технологічних процесів. Особливу увагу приділено складності управління динамічними та нелінійними системами, які чутливі до змін зовнішніх умов, таких як температура, тиск і навантаження. Традиційні методи керування, які базуються на статичних моделях, не завжди дозволяють враховувати динаміку перехідних процесів, що обмежує їх ефективність у реальних промислових умовах. Це часто призводить до підвищення енергетичних витрат, зниження якості кінцевого продукту та збільшення ризику дестабілізації роботи установки. Метою дослідження є розробка математичної моделі, здатної забезпечити адаптивність і стійкість системи керування ректифікаційною установкою до зовнішніх і внутрішніх факторів, а також зменшити енергетичні витрати. У статті запропоновано методологію, яка включає побудову моделей балансу маси, енергії та теплообміну, що дозволяють деталізувати динаміку перехідних процесів. Для моделювання використовували числові методи, зокрема методи Ейлера та Рунге-Кутта, які забезпечують високу точність аналізу в реальному часі. Валідація моделей проведена через порівняння отриманих розрахункових даних із експериментальними спостереженнями, що підтверджує їх адекватність і точність. Результати дослідження свідчать про те, що запропонована модель здатна забезпечити точне прогнозування поведінки системи навіть за умов різких змін зовнішніх факторів. Модель дозволяє оптимізувати теплові й масові потоки, що суттєво підвищує ефективність розділення компонентів і стабільність роботи системи. Особливий акцент зроблено на живучості системи – здатності зберігати функціональність і стійкість у складних і нестабільних умовах експлуатації. Практична значимість дослідження полягає у можливості зменшення енерговитрат, підвищення стабільності технологічного процесу та покращення якості кінцевої продукції. Запропонований підхід також сприяє мінімізації аварійних ризиків у промислових умовах. Оригінальність роботи полягає у створенні математичної моделі, що інтегрує точний опис динамічних перехідних процесів із можливістю застосування в сучасних автоматизованих системах управління. У перспективі подальших досліджень передбачається впровадження технологій машинного навчання для покращення адаптивності системи до змінних умов і підвищення точності прогнозування. Також планується розробка моделей для багатокомпонентних сумішей із комплексною динамікою, що дозволить ще більше підвищити ефективність роботи ректифікаційних установок і знизити їх енерговитрати.

**Ключові слова:** Перехідні процеси; Ректифікація; Математичне моделювання; Живучість системи; Числові методи

doi: <https://doi.org/10.15673/ret.v61i1.3112>

© The Author(s) 2025. This article is an open access publication  
This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY)  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



## 1. Вступ

Ректифікація є одним із найважливіших процесів у хімічній та нафтохімічній промисловості, що забезпечує поділ рідинних сумішей на окремі компоненти високого ступеня чистоти. Цей процес відіграє ключову роль у виробництві широкого спектра хімічних сполук, паливних компонентів та розчинників. Проте керування ректифікаційними установками є складним завданням через високу динамічність і нелінійність процесів, а також їхню чутливість до зовнішніх факторів, зокрема змін навантаження, температури та тиску [2]. Забезпечення стабільної та ефективної роботи ректифікаційних систем є критично важливим для підвищення якості продукції, мінімізації енерговитрат та зниження ризику виникнення аварійних ситуацій. Традиційні методи керування, що базуються на статичних або спрощених математичних моделях, часто не враховують складну динаміку процесів та не забезпечують необхідного рівня адаптивності до змінюваних умов роботи. Це вимагає розробки нових підходів до математичного моделювання та автоматичного керування ректифікаційними процесами, здатних забезпечити високу точність і надійність роботи технологічних установок [1, 5].

Однією з головних проблем у керуванні ректифікаційними установками є виникнення перехідних процесів, які можуть спричинити нестабільність та коливання технологічних параметрів, зокрема температури, тиску та складу суміші [14]. Ці флуктуації можуть негативно впливати на якість кінцевого продукту, підвищувати енерговитрати та навіть призводити до збоїв у роботі обладнання.

Додатковою складністю є те, що класичні підходи до автоматичного керування часто не враховують нелінійний характер динаміки ректифікаційних процесів та їхню залежність від зовнішніх факторів. Внаслідок цього традиційні системи регулювання демонструють недостатню ефективність у випадках різких змін навантаження чи параметрів середовища. Це створює необхідність розробки нових математичних моделей, здатних точно описувати динаміку ректифікаційних процесів, адаптуватися до змінних умов експлуатації та інтегруватися із сучасними системами автоматичного керування.

Основною метою даного дослідження є розробка математичної моделі, яка дозволить забезпечити високу адаптивність і стійкість системи

керування ректифікаційною установкою до зовнішніх та внутрішніх факторів. Для досягнення цієї мети передбачається провести детальний аналіз динаміки перехідних процесів у ректифікаційних системах, що дозволить краще зрозуміти особливості їхньої поведінки при різних режимах експлуатації. Також необхідно розробити математичну модель, здатну ефективно описувати ці процеси, враховуючи всі важливі параметри, що можуть впливати на систему.

## 2. Теоретичні основи ректифікації та перехідних процесів

Ректифікація є одним із найважливіших процесів у хімічній інженерії, що використовується для розділення багатокомпонентних сумішей шляхом багаторазової конденсації та випаровування. Процес здійснюється у спеціальній ректифікаційній колоні, де відбувається диференціальне розділення суміші на основі різниці температур кипіння компонентів. Головними параметрами ректифікації є температура, тиск і співвідношення рідкої та парової фаз [9,14].

Елементи системи ректифікації є фундаментом для моделювання, оскільки їхні параметри та характеристики визначають ключові змінні, що враховуються у математичних моделях. Опис елементів також допомагає зрозуміти вплив змін умов роботи на загальну ефективність системи, що є критичним для побудови живучих систем керування [12].

Ректифікаційна колона є основним елементом, де здійснюється процес розділення суміші на фракції. Вона характеризується такими параметрами, як висота, діаметр, а також кількість тарілок або пакувальних шарів, які визначають ефективність процесу розділення. Важливою особливістю є те, що збільшення кількості тарілок чи пакувальних шарів покращує контакт між рідкою та паровою фазами, що, в свою чергу, підвищує якість розділення. Продуктивність ректифікаційної колони визначається її висотою та діаметром, оскільки ці параметри безпосередньо впливають на обсяг рідини та пари, що можуть циркулювати в колоні. Окрім того, висота колони та її наповнення також мають вплив на енергетичні витрати через збільшення опору потоку, що потрібно враховувати при оптимізації роботи установки. Моделювання ректифікаційної колони дозволяє передбачити, як ці параметри впливають на стабіль-

ність процесу та якість отриманих фракцій, що є необхідним для оптимізації роботи системи загалом [1,14].

Конденсатор є ключовим елементом верхньої частини ректифікаційної установки, який відповідає за конденсацію парової фази, що виходить з колони. Він характеризується такими параметрами, як потужність охолодження, конструкція теплообмінника та температура охолоджуючого середовища. Ці характеристики визначають ефективність роботи конденсатора і його вплив на процес розділення. Роль конденсатора полягає в підтримці теплового балансу, адже він забезпечує відведення тепла у верхній частині колони, що дозволяє підтримувати необхідний температурний режим для ефективного розділення суміші. Крім того, конденсована рідина частково повертається в колону як флегма, що забезпечує додатковий масообмін між фазами і покращує процес ректифікації. Вибір конструкції конденсатора має значний вплив на енергетичну ефективність установки. Надмірні втрати тепла можуть знижувати продуктивність системи, тому важливо забезпечити оптимальне охолодження і мінімізацію енергетичних витрат. Ефективне моделювання роботи конденсатора допомагає враховувати зміни температури та потоків, що сприяє стабільній роботі ректифікаційної установки і оптимізації.

Ребойлер є ключовим елементом нижньої частини ректифікаційної установки, який відповідає за нагрівання рідини для створення парової фази, яка повертається у колону. Його основні параметри включають потужність нагрівання, тип теплообмінника та ефективність передачі тепла. Ці характеристики мають великий вплив на ефективність розділення компонентів у колоні.

Основною функцією ребойлера є формування парової фази, оскільки він забезпечує постійний потік пари, що піднімається в колону, сприяючи масообміну між рідкою та паровою фазами. Крім того, ребойлер регулює тепловий баланс, підтримуючи необхідний температурний градієнт у колоні для ефективного розділення компонентів суміші. Енергетична ефективність ребойлера є критичним фактором для загальних енергетичних витрат системи. Недостатнє нагрівання може знизити якість розділення, а надмірне нагрівання призводить до підвищення витрат енергії. Тому важливо правильно налаштувати роботу ребойлера, щоб забезпечити оптимальне використання енергії. Моделювання роботи ребойлера дозволяє оптимізувати енергоспоживання і забезпечити стабільну роботу ректифікаційної установки навіть за змінних умов [9], що підвищує загальну ефективність процесу.

Датчики вимірювання є невід'ємною частиною автоматизованої системи керування ректифікаційною установкою, забезпечуючи моніторинг ключових параметрів, таких як температура, тиск, витрати рідини та склад компонентів. Їхні основні характеристики включають точність, швидкодію та стабільність, що визначає ефективність функціонування установки. Завданням датчиків є контроль процесу, адже вони дозволяють в реальному часі відстежувати поточний стан системи та виявляти відхилення від оптимальних параметрів. Зібрані дані використовуються системою автоматичного керування для підтримки стабільності процесу, коригуючи такі параметри, як подача тепла або рідини.

Завдяки датчикам система отримує важливу інформацію для оптимізації роботи, що включає аналіз продуктивності установки та зниження енергетичних витрат. Це підвищує ефективність роботи всієї системи.

Правильне розташування та налаштування датчиків забезпечують стабільність роботи системи, підвищують якості продукції та дають можливість швидко реагувати на зміни умов [11,15], що в свою чергу покращує загальну ефективність процесу.

Регулятори є важливими елементами системи автоматичного керування ректифікаційною установкою, забезпечуючи підтримку оптимальних параметрів процесу, таких як температура, тиск, витрата рідини чи пари. Вони дозволяють стабільно коригувати параметри процесу, що є критичним для забезпечення стабільної роботи та високої ефективності установки. Завдяки регуляторам автоматично управляються параметри, що дозволяють досягти максимального розділення сумішей і мінімізувати втрати. Правильне налаштування регуляторів сприяє точності управління процесом, знижуючи енергетичні витрати і покращує загальну ефективність роботи установки. Крім того, регулятори забезпечують захист системи, швидко реагуючи на небезпечні зміни параметрів, що може запобігти аварійним ситуаціям, таким як надмірний тиск або перегрів.

Насоси та трубопроводи є важливими елементами системи ректифікації, які забезпечують транспортування рідини та пари між різними частинами

установки. Їх параметри, такі як потужність насосів, діаметр трубопроводів і стійкість до хімічних впливів, мають великий вплив на ефективність роботи системи.

Насоси забезпечують безперервний рух рідини, необхідний для роботи установки, наприклад, для подачі рідини до ребойлера або повернення флегми до колони.

Правильний вибір діаметра трубопроводів та налаштування насосів дозволяють мінімізувати гідравлічні втрати, що, в свою чергу, підвищує загальну ефективність установки. Трубопроводи також повинні забезпечувати герметичність, що є критичним для безпеки та підтримки якості процесу, запобігаючи витоків. Працездатність насосів і трубопроводів дозволяє оптимізувати умови транспортування рідини та пари, знижуючи енергетичні витрати і забезпечуючи стабільність роботи системи.

Привідна автоматика є ключовим елементом системи керування ректифікаційною установкою, що забезпечує точне виконання команд від регуляторів і управління виконавчими механізмами, такими як клапани, насоси та інші. Вона включає електроприводи, пневмоприводи та гідроприводи, які відповідальні за оперативну реакцію на сигнали, що надходять від регуляторів, що дозволяють підтримувати стабільність і точність параметрів процесу.

Привідна автоматика також має важливу роль у захисті системи. Сучасні приводи дозволяють уникнути перевантаження, забезпечуючи плавну роботу механіки і запобігаючи можливих аварійних ситуацій. Завдяки оптимальному управлінню потоками рідини та пари вона мінімізує енергетичні витрати, що підвищує загальну ефективність установки.

Налаштування та ефективне використання привідної автоматики сприяє підвищенню продуктивності, стабільності та енергетичної ефективності ректифікаційної установки [13].

Усі елементи системи керування ректифікаційної установки (рис. 1) – від колони, ребойлера та конденсатора до датчиків, регуляторів, насосів і привідної автоматики – працюють як єдиний інтегрований механізм. Їхня ефективна взаємодія забезпечує стабільність, точність і продуктивність процесу ректифікації. Кожен елемент виконує специфічну роль: від забезпечення теплового і масового балансу до збору даних і автоматичного регулювання параметрів. Розуміння

впливу цих компонентів на загальний процес є критично важливим для оптимізації роботи системи, підвищення її ефективності та зниження енергетичних витрат.

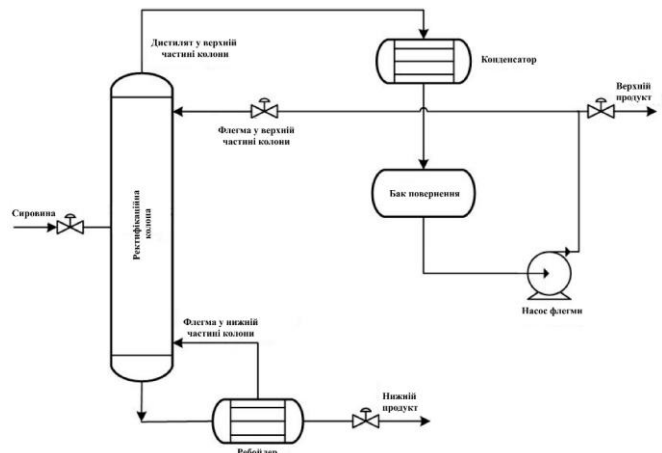


Рисунок 1 – Будова ректифікаційної колони

Основні елементи, що визначають роботу ректифікаційної колони:

1. Поділ на фракції: Розділення здійснюється завдяки багаторазовій взаємодії між парою та рідиною, що дозволяє отримати легкі компоненти у верхній частині колони, а важкі компоненти у нижній.

2. Флегмове число: Співвідношення рідини, що повертається до колони (флегма), та кількості дистиляту, що виводиться, є важливим регульованим параметром для підтримки ефективності процесу.

3. Енергетичний баланс: Теплообмін між різними ділянками колони підтримується за допомогою ребойлера (внизу) та конденсатора (вгорі) [9,10].

Перехідні процеси виникають у разі змін вхідних умов або збурень у системі (наприклад, зміни температури чи тиску). Вони є динамічними і тривають до досягнення нового стаціонарного режиму [2,7]. Для їх опису використовуються наступні основні підходи:

1. Диференційні рівняння:

– Баланс маси: описує зміну концентрації компонентів у різних частинах колони.

– Баланс енергії: враховує теплові потоки, що забезпечують фазові переходи.

2. Нелінійність процесу: У реальних умовах ректифікаційні процеси є нелінійними через складні взаємодії між фазами, зміну теплопередачі та залежність від параметрів системи.

3. Термодинамічні обмеження: Кожен перехідний процес обмежений фазовою рівновагою між парою і рідиною, яка описується кривими VLE (vapor-liquid equilibrium).

Таким чином, для ефективного управління ректифікаційними установками необхідно враховувати динаміку перехідних процесів і їх вплив на енергетичні та масові баланси системи. Ці теоретичні основи створюють базу для побудови математичних моделей, що дозволяють аналізувати та оптимізувати роботу установок у реальному часі.

### 3. Моделювання живучої системи

Живучість системи керування ректифікацією припускає забезпечення стійкого функціонування незалежно від зовнішніх та внутрішніх пертурбацій. Це необхідно для мінімізації простоїв, втрат продуктивності та забезпечення стабільності технологічного процесу навіть у випадку непередбачуваних відхилень, таких як зміна температури, тиску або подачі реагентів. Живучість є ключовим фактором для надійної роботи ректифікаційної установки, оскільки дозволяє системі швидко адаптуватися до змін і повернутися до заданого режиму роботи [4]. Моделювання такої системи вимагає створення детермінованих та стохастичних рівнянь, що задовольняють умови стійкості, ефективності та оперативного реагування на збурення.

Основні методи для дослідження живучості:

1. Метод постановки завдань стійкості – це підхід, що дозволяє моделювати та аналізувати реакцію системи на заздалегідь задані збурення (пертурбації). У цьому методі формується певний набір сценаріїв, що включають можливі відхилення від нормальних режимів роботи, такі як зміни температури, тиску чи витрат [8]. Оцінка системного відгуку базується на визначенні стійкості перехідних процесів, часу виходу на стабільний режим і рівня відновлення параметрів системи [10]. Цей метод є ефективним для ідентифікації критичних точок системи та виявлення її слабких місць, оскільки він забезпечує чітке визначення реакції системи на задані збурення. Проте він також вимагає формування великої кількості сценаріїв і не завжди враховує випадкові фактори, що може обмежити його застосування в умовах невизначеності.

2. Часові моделі – це метод математичного моделювання, який дозволяє аналізувати динамічну поведінку системи у часовому вимірі. Ці моделі

описують, як змінюються параметри системи (температура, тиск, концентрація компонентів тощо) з плином часу при різних початкових умовах або впливах. Основою часових моделей є диференціальні рівняння, що відображають закони збереження маси, енергії та теплообміну. Застосування часових моделей дозволяє виявити перехідні процеси, визначити їх тривалість та оцінити здатність системи до повернення у стабільний стан після збурень [2]. Цей метод забезпечує детальний аналіз динаміки системи у часовому вимірі та можливість вивчення тривалості перехідних процесів. Однак, він також стикається зі складністю обчислень при великих системах і залежить від точності початкових умов, що може вплинути на результати моделювання.

3. Числові методи розв'язання – це набір алгоритмічних підходів, які використовуються для розрахунку складних математичних рівнянь у реальному часі, коли аналітичне рішення є складним або неможливим. Вони дозволяють знаходити наближені значення змінних стану системи шляхом дискретизації диференціальних рівнянь. До основних числових методів належать методи Ейлера, Рунге-Кутта, Ньютона-Рафсона та метод скінченних різниць. Ці методи ефективно застосовуються для моделювання динаміки перехідних процесів у ректифікаційних системах, забезпечуючи високу точність і оперативність обчислень [3]. Використання числових методів забезпечує високу точність обчислень та ефективність для складних нелінійних систем. Проте, вони вимагають значних обчислювальних ресурсів і потребують вибору оптимального методу розрахунку, що може ускладнити процес моделювання.

Таким чином, комбінування цих методів дозволяє компенсувати недоліки кожного з них та забезпечити більш повну оцінку живучості системи в умовах різних збурень.

### 4. Математичне моделювання перехідних процесів

Математичне моделювання – це метод, що дозволяє створювати абстрактні математичні описи реальних процесів, які відбуваються у системі, для їх подальшого аналізу та оптимізації [6,7]. Для ректифікаційної установки математичне моделювання є необхідним інструментом для відображення динамічних змін у процесі, що включає масообмін, теплообмін і зміну фаз.

Етапи математичного моделювання для ректифікаційної установки:

1. Формулювання задачі:

– Визначення мети моделювання (оптимізація процесу, аналіз стабільності).

– Ідентифікація основних змінних (температура, тиск, склад компонентів).

2. Побудова математичної моделі:

Математична модель ректифікаційної установки базується на взаємозв'язку між різними процесами, що відбуваються в системі, зокрема піноутворенням, концентрацією компонентів, енергетичними потоками та теплообміном. Метою цієї моделі є оптимізація та контроль процесу розділення суміші компонентів за допомогою відповідних математичних рівнянь.

Зміна маси компонентів у системі ректифікаційної установки залежить від різниці між масовими потоками, що надходять і виходять із системи, а також від ризику хімічних реакцій, які можуть змінювати кількість компонентів. Це описується рівнянням:

$$\frac{dM_i}{dt} = F - V_i + \sum_{j=1}^n R_{ij}, \quad (1)$$

де  $M_i$  – маса компонента  $i$  в системі. Це змінна, яка може змінюватися залежно від часу внаслідок припливу, відпливу або хімічних реакцій;  $t$  – час, у якому відбувається зміна параметрів системи, таких як температура, тиск, маса або енергія;  $F$  – масовий потік компонента  $i$ , що надходить у систему. Це вхідна величина, яка вказує, скільки маси певного компонента додається до системи за одиницю часу;  $V_i$  – масовий потік компонента  $i$ , що виходить із системи. Це відтік, який визначає, скільки маси компонента залишає систему;  $R_{ij}$  – швидкість реакцій, які впливають на компонент  $i$ , де  $j$  позначає інші компоненти, що беруть участь у реакціях.

Це працює таким чином: вхідний потік  $F$ , якщо в систему надходить більше компонента, ніж виходить, загальна маса  $M$  буде збільшуватися. Відтік  $V$ , якщо система втрачає більше компонента, ніж надходить, маса буде зменшуватися. Хімічні реакції – цей термін враховує, як хімічні перетворення змінюють кількість компонентів у системі. Ця формула використовується для кожного компоненту суміші (наприклад, бензол, толуол). Також враховується, як маса компонентів змінюється в кожному шарі або секції колони.

Формула допомагає визначити рівноважні концентрації, що є важливими для оптимізації процесу розділення.

Зі зміною маси компонентів пов'язаний і баланс енергії. Для ректифікаційної установки важливі енергетичні потоки, зокрема підведене тепло через ребойлер, яке необхідне для випаровування рідини в нижній частині колони, та відведене тепло через конденсатор, яке відповідає за процес конденсації парів у верхній частині. Загальна зміна енергії в системі описується рівнянням:

$$\frac{dE}{dt} = Q_{in} - Q_{out} + W, \quad (2)$$

де  $E$  – загальна енергія системи. Це включає внутрішню енергію рідини та пари, яка змінюється у часі через теплові потоки;  $dE/dt$  – швидкість зміни енергії в системі;  $Q_{in}$  – тепло, яке підводиться до системи. Для ректифікаційної установки це може бути тепло, що подається через ребойлер для нагріву рідини;  $Q_{out}$  – тепло, що втрачається системою. Це може бути тепло, яке відводиться через конденсатор або втрати через теплообмін із зовнішнім середовищем;  $W$  – робота, виконувана системою. Це може включати енергію, що витрачається на циркуляцію рідини або парів.

Цей баланс є критичним для підтримання ефективності роботи установки та уникнення теплових втрат. Підведене тепло  $Q_{in}$  впливає на випаровування рідини в нижній частині ректифікаційної колони. Більше тепло – інтенсивніше випаровування. Відведене тепло  $Q_{out}$  контролює конденсацію парів у верхній частині колони. Відведення тепла необхідне для підтримки балансу фаз. Робота  $W$  може бути важливою в активних системах, де потрібні насоси або компресори для переміщення рідини чи пари [16]. У контексті ректифікаційної установки аналіз балансу енергії важливий для забезпечення стабільності процесу, особливо у випадках зовнішніх збурень або зміни умов роботи установки. Також дозволяє відстежувати зміну теплових потоків у системі та допомагає оптимізувати використання енергії, зменшуючи втрати та підвищуючи ефективність розділення компонентів.

Крім того, процес теплообміну між системою та навколишнім середовищем є важливим елементом для підтримання стабільності температури в колоні. Описує цей процес рівняння для теплообміну, яке пов'язує кількість тепла, що передається,

з різницею температур між колонною та навколишнім середовищем:

$$Q = kA(T_{col} - T_{ext}), \quad (3)$$

де  $Q$  – кількість тепла, яке передається між середовищами (наприклад, між рідиною в колоні та зовнішнім середовищем);  $k$  – коефіцієнт теплопередачі, що залежить від матеріалів, конструкції та типу середовищ;  $A$  – площа теплообміну, тобто поверхня, через яку здійснюється передача тепла;  $T_{col}$  – температура колони (або рідини/пари в колоні);  $T_{ext}$  – температура зовнішнього середовища.

Формула описує залежність кількості тепла, що передається, від різниці температур між колонною і навколишнім середовищем. Вона враховує ефективність передачі тепла (через  $k$ ) і площу, на якій відбувається теплообмін  $A$  у контексті ректифікаційної установки.

Таким чином, взаємодія між балансом маси, енергетичними потоками та теплообміном створює комплексну картину, в якій зміна маси компонентів безпосередньо пов'язана з тепловими процесами. Підведене тепло впливає на випаровування і, відповідно, на зміни в складі суміші, в той час як відведене тепло контролює конденсацію та забезпечує стабільність фазової рівноваги. Це дозволяє забезпечити оптимальні умови для розділення компонентів і підвищити ефективність роботи ректифікаційної установки.

### 3. Вибір числових методів:

Використання методів Ейлера або Рунге-Кутта для розв'язання диференціальних рівнянь. Метод Ейлера є найпростішим числовим методом. Він використовує ітеративний підхід для наближеного обчислення розв'язку диференціального рівняння [3]:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(t_n, y_n), \quad (4)$$

де  $y_n$  – наближене значення функції на кроці  $n$ ;  $h$  – крок дискретизації;  $f(t_n, y_n)$  – функція, що визначає похідну.

Особливості методу полягають в простоті реалізації, що в свою чергу призводить до низької точності при великих кроках  $h$ , що може призводити до накопичення помилок.

Застосування в ректифікації: метод Ейлера може бути використаний для швидкої оцінки перехідних процесів у ректифікаційній колоні за умов невеликої складності.

Метод Рунге-Кутта є більш точним числовим методом, ніж метод Ейлера [3]. Він використовує кілька обчислень функції  $f(t_n, y_n)$  на кожному кроці:

$$y_{n+1} = y_n + 6h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5)$$

де  $y_n$  – значення шуканої функції на  $n$ -ому кроці;  $y_{n+1}$  – наближене значення функції на наступному,  $(n+1)$ -ому кроці;  $h$  – крок інтегрування;  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – проміжні коефіцієнти, що обчислюються за такими формулами:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n); \\ k_2 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right); \\ k_3 &= f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right); \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут вже все навпаки, а саме велика точність навіть при більших кроках  $h$ , що збільшує обчислювальні витрати порівняно з методом Ейлера.

Застосування в ректифікації: Метод Рунге-Кутта підходить для точного моделювання перехідних режимів, особливо у випадках складних процесів із високими вимогами до стабільності та точності. З цього робимо висновок, що метод Ейлера використовують для простих систем або коли потрібно швидко, але менш точне рішення, а метод Рунге-Кутта застосовують для складних систем, де необхідна висока точність. Обидва методи допомагають моделювати динамічні процеси, дозволяючи аналізувати поведінку системи в часі, оцінювати її стійкість і оптимізувати параметри.

4. Валідація моделі передбачає порівняння результатів чисельного моделювання із експериментальними даними для підтвердження адекватності моделі. Для цього використовуються тестові сценарії, які оцінюють точність математичних розрахунків у різних режимах роботи ректифікаційної установки. Важливо також оцінити відхилення між розрахованими та реальними значеннями ключових параметрів, таких як температура, тиск і концентрація компонентів. Крім того, підтвердження стабільності моделі здійснюється через перевірку її стійкості до малих змін початкових умов, що підтверджує надійність отриманих результатів.

5. Аналіз результатів полягає у вивченні перехідних процесів, оцінці стабілізації параметрів системи та визначенні ефективності запропонованих математичних моделей. Основні етапи аналізу включають візуалізацію результатів у вигляді графіків зміни температури, тиску та складу компонентів з часом, визначення часу виходу системи на стабільний режим після збурень, оцінку точності числових методів шляхом порівняння результатів моделювання з експериментальними даними, а також розробку рекомендацій щодо оптимізації параметрів для покращення живучості та ефективності системи.

Математичне моделювання дозволяє визначити оптимальні режими роботи установки, досліджувати вплив збурень та мінімізувати енергетичні витрати при досягненні стабільного стану системи.

## 5. Висновки

У статті розглянуто математичне моделювання перехідних процесів у живучій системі керування ректифікаційною установкою. Запропоновано методи моделювання, що включають баланс маси, енергії та теплообміну, а також використання числових методів для вирішення задач у реальному часі. Проведено аналіз живучості системи та показано її стійкість при зовнішніх пертурбаціях. Запропонований підхід дозволяє забезпечити адаптивність системи до змін вхідних параметрів та зовнішніх умов, оптимізувати енергоспоживання і зменшити втрати тепла завдяки вдосконаленим моделям теплообміну, а також поліпшити прогнозування поведінки системи у нестабільних умовах за рахунок високоточного чисельного моделювання. У майбутньому перспективи розвитку включають впровадження машинного навчання для автоматизації процесу управління, застосування більш складних моделей для аналізу багатоконпонентних сумішей та розробку інтегрованих систем моніторингу для підвищення надійності та ефективності роботи ректифікаційних установок.

## Література

1. **Mark E. Davis.** Numerical Methods and Modeling for Chemical Engineers. 2nd ed. – New York: Wiley, 2013. – 272 p.
2. **Diwekar U.** Batch Distillation: Simulation, Optimal Design, and Control. 2nd ed. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2012. – 400 p.
3. **Dorfman K. D., Daoutidis P.** Numerical Methods with Chemical Engineering Applications. – Cambridge: Cambridge University Press, 2017. – 23 p.
4. **Луцик Ю. А., Стопакевич А. О.** Розробка алгоритмічного забезпечення живучої системи керування бражною колоною спиртового виробництва // Інформаційні технології і автоматизація: збірник тез доповідей XIII Міжнародної науково-практичної конференції. – Одеса, 22-23 жовтня 2020. – С. 130-132.
5. **Smith R.** Chemical Process Design and Integration. 2nd ed. – Chichester: Wiley, 2016. – 928p.
6. **Ghanadzadeh Gilani H., Ghanadzadeh Samper K., Khodaparast Haghi R.** Advanced Process Control and Simulation for Chemical Engineers. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2021. – 224 p.
7. **Онищук О.О., Кормош, Ж.О.** Математичне моделювання та застосування ЕОМ в хімічній технології. – Луцьк: Вежа-Друк, 2016. – 76 с.
8. **Лукінюк М. В.** Контроль і керування хіміко-технологічними процесами. Кн. 1. Методи та технічні засоби автоматичного контролю хіміко-технологічних процесів. – Київ: НТУУ "КПІ", 2012. – 336 с.
9. **Robbins L.** Distillation Control, Optimization, and Tuning: Fundamentals and Strategies. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2011. – 144 p.
10. **Regupathi I., Shetty V. K., Thanabalan M.** Recent Advances in Chemical Engineering. – Singapore: Springer, 2016. – 336 p.
11. **Ладанюк А. П., Власенко Л. О., Луцька Н. М., Смітюх Я. В., Бойко Р. О.** Автоматизовані технологічні комплекси: сучасні методи, задачі аналізу та синтезу. Частина 2. Приклади реалізації і проблема технологічних ризиків // Наукові праці Національного університету харчових технологій – 2020. – Т. 26, № 4. – С. 15-22.
12. **Vamvoudakis K., Lewis F. L.** Control of Complex Systems: Theory and Applications. – Butterworth-Heinemann, 2016. – 762 p.
13. **Seames W.** Designing Controls for the Process Industries. – Boca Raton, FL: CRC Press, 2017. – 448 p.
14. **Gorak A., Schoenmakers H.** Distillation: Operation and Applications. – London, Academic Press. – 2014. – 450 p.
15. **Svrcek W. Y., Mahoney D. P., Young B. R.** A Real-Time Approach to Process Control. 3rd ed. – Hoboken, NJ: Wiley, 2014. – 360 p.

16. **Dhar P. L.** Thermal System Design and Simulation. – San Diego, CA: Academic Press, 2016. – 620 p.  
 17. **H. Tan, L. Cong.** Modeling and Control Design

for Distillation Columns Based on the Equilibrium Theory // Processes. – 2023. – Vol. 11, no. 2. – 607 p.

Отримана в редакції 15.02.2025, прийнята до друку 04.03.2025

## Mathematical modeling of transient processes in a resilient control system for a rectification unit

**Yuliia Irlyk**

State University of Intelligent Technologies and Telecommunications, 1, Kuznechna str., Odesa, 65023, Ukraine

✉ e-mail: lutsyk.yulia287@gmail.com

*The article examines transient processes in the control system of a distillation unit, which are critical for ensuring the stability, efficiency, and energy-saving performance of industrial technological processes. Particular attention is paid to the complexity of managing dynamic and nonlinear systems that are sensitive to changes in external conditions such as temperature, pressure, and load. Traditional control methods based on static models do not always account for the dynamics of transient processes, limiting their effectiveness in real industrial conditions. This often leads to increased energy consumption, reduced product quality, and higher risks of destabilizing the unit's operation. The aim of the study is to develop a mathematical model capable of ensuring the adaptability and resilience of the control system of the distillation unit to external and internal disturbances while also reducing energy losses. The article proposes a methodology that includes constructing models of mass, energy, and heat transfer balances to detail the dynamics of transient processes. Numerical methods, particularly Euler and Runge-Kutta methods, were used for modeling, providing high-precision analysis in real time. Model validation was conducted by comparing calculated data with experimental observations, confirming their adequacy and accuracy. The results of the study indicate that the proposed model can provide accurate predictions of system behavior even under abrupt changes in external factors. The model enables optimization of heat and mass flows, significantly improving the efficiency of component separation and the system's operational stability. Special emphasis is placed on the resilience of the system—its ability to maintain functionality and stability under challenging and unstable operating conditions. The practical significance of the research lies in the potential to reduce energy consumption, enhance the stability of technological processes, and improve the quality of the final product. The proposed approach also minimizes the risk of industrial accidents. The originality of the work lies in creating a mathematical model that integrates a precise description of dynamic transient processes with applicability in modern automated control systems. Future research perspectives include implementing machine learning technologies to enhance system adaptability to changing conditions and improve prediction accuracy. Additionally, the development of models for multi-component mixtures with complex dynamics is planned, which will further improve the efficiency of distillation units and reduce their energy consumption.*

**Keywords:** Transient processes; Rectification; Mathematical modeling; System resilience; Numerical methods

### References

1. **Mark E. Davis.** (2013) Numerical Methods and Modeling for Chemical Engineers. 2nd ed. *New York: Wiley*, 272.
2. **Diwekar, U.** (2012) Batch Distillation: Simulation, Optimal Design, and Control. 2nd ed. *Boca Raton, FL: CRC Press*, 400
3. **Dorfman, K. D., Daoutidis, P.** (2017) Numerical Methods with Chemical Engineering Applications. *Cambridge: Cambridge University Press*, 23.
4. **Lutsyk, Y. A., Stopakevych, A. O.** (2020) Development of Algorithmic Support for a Resilient Control System for a Wash Column in Alcohol Production. *Proceedings of the XIII International Scientific and Practical Conference on Information Technologies and Automation, Odesa, Oct. 22-23*, 130-132.
5. **Smith, R.** (2016) Chemical Process Design and In-

tegration. 2nd ed. *Chichester: Wiley*, 928.

6. **Ghanadzadeh Gilani H., Ghanadzadeh Samper K., Khodaparast Haghi R.** (2021) *Advanced Process Control and Simulation for Chemical Engineers. Boca Raton, FL: CRC Press*, 224.

7. **Onyshchuk, O.O., Kormosh, Zh.O.** (2016) *Mathematical modeling and application of computers in chemical technology. Lutsk: Vezha-Druk*, 76.

8. **Lukinyuk, M. V.** (2012) *Control and management of chemical and technological processes. Book. 1. Methods and technical means of automatic control of chemical and technological processes. Kyiv:NTUU "KPI"*, 336.

9. **Robbins, L.** (2011) *Distillation Control, Optimization, and Tuning: Fundamentals and Strategies. Boca Raton, FL: CRC Press*, 144.

10. **Regupathi, I., Shetty, V. K., Thanabalan, M.** (2016) *Recent Advances in Chemical Engineering. Singapore: Springer*, 336.

11. **Ladanyuk, A. P., Vlasenko, L. O., Lutska, N. M., Smityukh, Y. V., Boiko, R. O.** (2020) *Automa-*

*ted Technological Complexes: Modern Methods, Analysis Tasks, and Synthesis. Scientific Works of the National University of Food Technologies*, 26, 4, 15-22.

12. **Vamvoudakis, K., Lewis, F. L.** (2016) *Control of Complex Systems: Theory and Applications. Butterworth-Heinemann*, 762.

13. **Seames, W.** (2017) *Designing Controls for the Process Industries. Boca Raton, FL: CRC Press*, 448.

14. **Gorak, A., Schoenmakers, H.** (2014) *Distillation: Operation and Applications. London, Academic Press*, 450.

15. **Svrcek, W. Y., Mahoney, D. P., Young, B. R.** (2014) *A Real-Time Approach to Process Control. 3rd ed. Hoboken, NJ: Wiley*, 360.

16. **Dhar, P. L.** (2016) *Thermal System Design and Simulation. San Diego, CA: Academic Press*, 620.

17. **Tan, H., Cong, L.** (2023) *Modeling and Control Design for Distillation Columns Based on the Equilibrium Theory. Processes*, 11, 2, 607.

---

Received 15 February 2025

Approved 04 March 2025

Available in Internet 31 March 2025