

## ЕНЕРГЕТИКА ТА ЕНЕРГОЗБЕРЕЖЕННЯ

УДК 536.2: 678.4.04

### Рішення завдань теплопровідності в тілі при дії двох джерел теплоти

*I. Л. Бошкова*<sup>1✉</sup>, *Н. В. Волгушева*<sup>2</sup>, *М. Д. Потапов*<sup>3</sup>, *Н. О. Колесниченко*<sup>4</sup>, *О. С. Бондаренко*<sup>5</sup>

<sup>1-5</sup>Одеська національна академія харчових технологій, вул. Канатна, 112, Одеса, 65039, Україна

✉ e-mail: <sup>1</sup>boshkova.irina@gmail.com; <sup>3</sup>doroshlgan@gmail.com; <sup>4</sup>kolesnychenko.natalia@gmail.com

ORCID: <sup>1</sup><http://orcid.org/0000-0001-5989-9223>; <sup>2</sup><http://orcid.org/0000-0002-9984-6502>; <sup>3</sup><https://orcid.org/0000-0002-6847-5745>; <sup>4</sup><http://orcid.org/0000-0002-2851-8050>; <sup>5</sup><https://orcid.org/0000-0002-0111-0768>

У роботі аналізуються математичні моделі, що представляють нагрівання тіл у мікрохвильовому електромагнітному полі з урахуванням масовіддачі, наприклад, при випаровуванні вологи. Дослідження ґрунтуються на підходах, запропонованих О.В. Ликовим, в основі яких лежить рівняння теплопровідності з урахуванням внутрішніх джерел теплоти, які можуть бути як позитивними, так і негативними. Об'ємний характер нагрівання матеріалу в мікрохвильовому полі дозволяє розглядати матеріал як середовище, у якому діють внутрішні позитивні джерела теплоти. Негативне джерело теплоти пов'язане з потоком вологи, що випарувалася. Розглядаються моделі, що описують теплопровідність у напівобмеженому масиві при граничних умовах I і III роду. Рішення моделей у неявному (диференціальному) вигляді привело до одержання залежностей для розрахунку локальних температур у тілі. Проведено аналіз розрахункових даних по розподілу вологовмісту й температури матеріалу в процесі сушіння при мікрохвильовому підведенні енергії. Представлено результати розрахунків при різних значеннях коефіцієнтів тепловіддачі, питомої потужності магнетронів, коефіцієнта температуропровідності матеріалу. Отримано відповідність розрахункових значень реальним фізичним процесам. У той же час виявлені області, для яких розрахунки не відповідають реальній фізичній картині. Визначені обмеження по застосовності по питомій щільності теплового потоку й коефіцієнту тепловіддачі. Аналітично досліджена середня температура тіла з безперервно діючими джерелами теплоти при граничних умовах III роду. Установлено, що для одержання достовірних даних по температурах матеріалу по аналітичним залежностям, отриманим для середньої безрозмірної надлишкової температури, потрібне виконання умови  $t_c > t_0$  (температура навколишнього середовища вище температури матеріалу).

**Ключові слова:** Математична модель; Граничні умови; Температура; Вологовміст; Области застосування

doi: <https://doi.org/10.15673/ret.v56i3-4.1945>

© The Author(s) 2020. This article is an open access publication

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY)

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



#### 1. Вступ

Нагрівання матеріалів у мікрохвильовому електромагнітному полі при раціональному виборі режимних параметрів є високоефективним відносно швидкості, енерговитрат і якості кінцевої продукції. Подальше вивчення процесу нагрівання в

мікрохвильовому полі доцільно доповнити аналітичними дослідженнями, серед яких найбільш важливі дані по температурі матеріалу, що є базовими для оцінки ефективності перетворення енергії мікрохвильового поля, ефектів дії й оцінки впливу вхідних характеристик на кінетику процесу. Складання математичних моделей, що адекватно відо-

бражають фізичну сутність явищ, що протікають, під дією мікрохвильового поля, зв'язане з певними труднощами, пов'язаними із багатофакторністю взаємодії електромагнітного поля з полярними діелектриками й необхідністю (при переході до теплової схеми моделі) визначення елементів, що є вторинними, і виключення їх. Аналіз підходів до складання моделей взаємодії мікрохвильового поля з матеріалом показав, що коректні математичні моделі, призначені для одержання інформації про явища теплопровідності для розглянутої області досліджень, можна одержати, ґрунтуючись на моделях, запропонованих О.В. Ликовим [1], в основі яких лежить рівняння теплопровідності з урахуванням внутрішніх джерел теплоти, які можуть бути як позитивними, так і негативними. Об'ємний характер нагрівання матеріалу в мікрохвильовому полі [2] дозволяє розглядати матеріал як середовище, у якому діють внутрішні позитивні джерела теплоти. Методи рішення можна розділити на точні аналітичні, наближені і чисельні. До точних аналітичних методів відносять методи розділення змінних (Фур'є), інтегральних перетворень, джерел і функцій Гріна, теплових потенціалів. Метод Фур'є полягає в поданні розв'язку крайової задачі у вигляді нескінченної суми частинних розв'язків, які відповідають диференціальним рівнянням і граничним умовам. Його застосовуємо за умови, що можливий поділ змінних у вхідних рівняннях і задачі Штурма-Ліувілля. Метод Фур'є зручніше застосовувати в обмежених областях, до однорідних рівнянь і граничних умов. При наявності неоднорідності в рівнянні (джерело теплоти) її попередньо розкладають в ряд Фур'є за власними функціями задачі. Неоднорідні граничні умови зводяться до однорідних. Метод інтегральних перетворень застосовується до лінійних рівнянь і вивчає не саму функцію (оригінал), а її зображення. Зображення отримують, помноживши ядро перетворення і проінтегрувавши отриманий вираз в напівнескінченних, кінцевих або нескінченних межах по тій змінній, по якій проводиться перетворення (часу або координаті). Застосовувавши перетворення до математичної моделі процесу, отримують формулювання завдання в зображеннях, вирішують його, а потім здійснюють зворотне перетворення і знову переходять до оригіналу. Вид ядра перетворення залежить від типу інтегрального перетворення. Застосовується перетворення Лапласа, Фур'є, Ханкеля та ін. Метод інтегрального перетворення Лапласа (операційний метод) – один

з найбільш ефективних для рівнянь нестационарних задач теплопровідності. Він дозволяє отримувати наближені асимптотичні рішення для малих або великих значень часу  $t$ . Техніка рішення спрощується завдяки наявності досить докладних таблиць зображень для різних функцій. Перетворення Лапласа ефективно при різних граничних умовах, однак його застосування важке при складних початкових умовах. Для необмежених тіл вельми ефективним є метод джерел. Його сутність полягає в наступному: процес поширення теплоти в тілі необхідно розглядати як сукупність процесів вирівнювання температури, викликаних дією безлічі джерел, розподілених як в часі, так і в просторі. На основі застосування теорії узагальнених функцій шляхом зведення задачі теплопровідності для багат шарової конструкції до одношарової зі змінними (розривними) фізичними властивостями середовища в замкнутому вигляді отримано точний аналітичний розв'язок задачі нестационарної теплопровідності зі змінними в часі внутрішніми джерелами теплоти [1]. Однак запропоновані залежності мають свої обмеження і можуть бути застосовані виключно для багат шарових конструкцій при заданих значеннях внутрішніх джерел теплоти. Найбільш загальний і результативний підхід до вирішення крайових задач теплопровідності з внутрішніми джерелами теплоти був запропонований О. В. Ликовим [1]. У цій науковій праці академік Ликов привів рішення задач теплопровідності при безперервно діючих джерелах теплоти, постійних і змінних, для основних тіл: напівобмеженого масиву, необмеженої пластини, циліндру, кулі, при граничних умовах I і III роду. Аналітичне рішення завдань теплопровідності в тілі в умовах дії двох джерел теплоти (позитивним, обумовленим перетворенням енергії електромагнітного поля в теплову, і негативним, обумовленим випаруванням) отримано для напівобмеженого масиву при граничних умовах I і III роду [3-7]. Шар матеріалу розглядається як напівобмежений стрижень із тепловою ізоляцією бічної поверхні при початковій температурі  $t_0$ . У середині стрижня діє позитивне джерело тепла, яке обумовлене дією мікрохвильового поля, питома потужність якого  $q_{v1}$ , Вт/м<sup>3</sup>, і негативним, обумовленим випаром, з питоною потужністю  $q_{v2}$ , Вт/м<sup>3</sup>. Знаходження рішень прямих задач нестационарної теплопровідності, ґрунтуючись на інформації про тепловий стан, яке визначається температурним полем досліджуваного об'єкта; визначення причинних характеристик

теплообмінного процесу в тілі: граничні умови і їхні параметри, початкові умови, теплофізичні властивості, внутрішні джерела тепла і провідності, а також геометричні характеристики тіла або системи необхідні для визначення оптимальних параметрів налаштування теплового режиму і для коректної роботи при нестационарних режимах теплообміну. Рішення диференціального рівняння із прийнятими умовами однозначності дозволяє розрахувати локальну температуру тіла як для умов винятково нагрівання в мікрохвильовому полі, так і при видаленні вологи в процесі мікрохвильового сушіння.

## 2. Аналітичне дослідження температурного поля в діелектричному матеріалі при мікрохвильовому нагріванні

### 2.1 Температурне поле тіла з безперервно діючими джерелами теплоти в напівобмеженому масиві при граничних умовах I роду.

Математичне формулювання завдання теплопровідності в диференціальній формі представляються в такий спосіб [2]:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{q_{v1}}{c \cdot \rho} + \frac{q_{v2}}{c \cdot \rho}; \quad (1)$$

$$t(x, 0) = t_0, \quad (2) \quad \frac{\partial t(\infty, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$t(0, \tau) = t_{\text{пов}} = \text{const}, \quad (4)$$

де  $t$  – температура матеріалу;  $x$  – поточна координата;  $\tau$  – час;  $a, c, \rho$  – відповідно коефіцієнт теплопровідності, питома теплоємність і густина шару матеріалу;  $t_{\text{пов}}$  – температура поверхні матеріалу. Приймалося, що локальне (на глибині  $x$ )

значення питомої потужності позитивного джерела  $q_{v1}$  визначалося питомою потужністю позитивного джерела на поверхні  $q_{v10}$  й коефіцієнтом ослаблення  $\gamma$ :  $q_{v1} = q_{v10} \cdot \gamma$ , а зміна питомої потужності негативного джерела враховувалося введенням коефіцієнта  $\beta$ :  $q_{v2} = q_{v20} \cdot \beta$ .

Матеріал розглядався у вигляді напівобмеженого масиву, що перебуває при температурі  $t_0$ . У початковий момент часу температура поверхні приймає температуру  $t_{\text{пов}}$ , що залишається постійною протягом усього процесу. Рішення диференціального рівняння (1) для заданої форми дозволило одержати залежності для розрахунку локальних температур напівобмеженого масиву [2].

При випаровуванні вологи (період постійної швидкості сушіння) отримане рішення:

$$t(x, \tau) = \left(1 - \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}}\right) t_0 + \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} t_{\text{пов}} - \frac{q_{v10}}{c \cdot \rho \cdot a \cdot \gamma^2} \left[ e^{-\gamma x} - \frac{1}{2} e^{\gamma^2 a \tau - \gamma x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \gamma \sqrt{a\tau} \right) + \frac{1}{2} e^{\gamma^2 a \tau + \gamma x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \gamma \sqrt{a\tau} \right) - \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right] - \frac{q_{v20}}{c \cdot \rho \cdot a \cdot \beta^2} \left[ e^{-\beta x} - \frac{1}{2} e^{\beta^2 a \tau - \beta x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} - \beta \sqrt{a\tau} \right) + \frac{1}{2} e^{\beta^2 a \tau + \beta x} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} + \beta \sqrt{a\tau} \right) - \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{a\tau}} \right]. \quad (5)$$

Застосовуючи залежність (5), отримані розрахункові дані по розподілу температури матеріалу в процесі сушіння при мікрохвильовому підведенні енергії. Всі теплофізичні параметри шару зерна приймали відповідно до рекомендацій [8]. Значення максимальних питомих потужностей джерел  $q_{v1}$  і  $q_{v2}$ , а також коефіцієнтів поглинання  $\gamma$  і  $\beta$ , отримані експериментально (табл. 1). Тут  $W_0$  – швидкість сушіння в першому періоді.

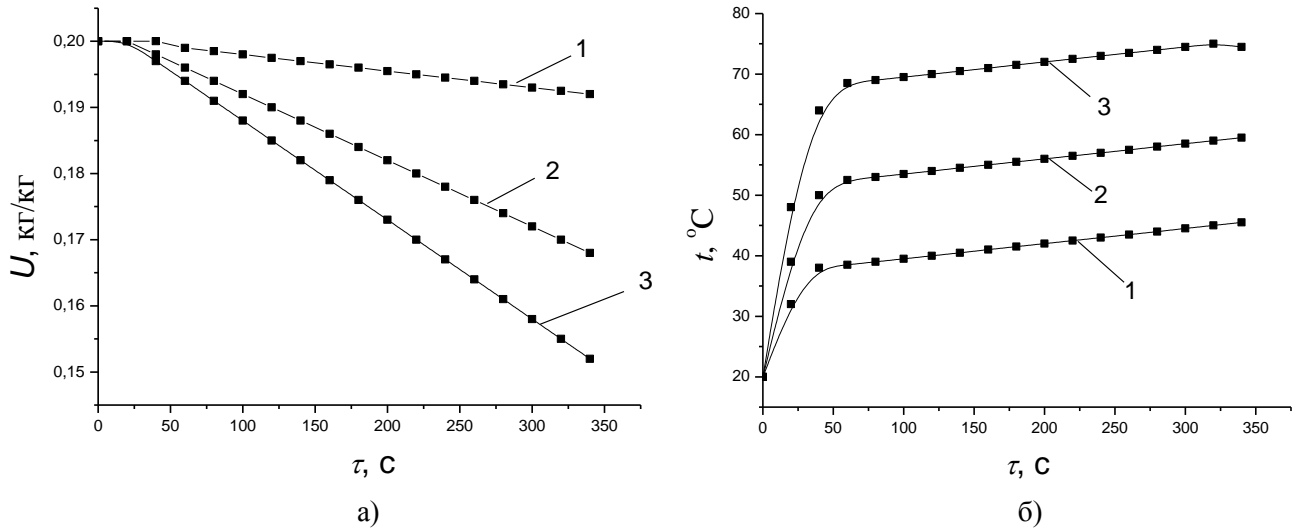
**Таблиця 1** – Вихідні дані для розрахунку поля температур по залежності (5). Маса завантаження зерна (овес) – 0,3 кг

№	$P_{\text{вих}}, \text{Вт}$	$W_0 \cdot 10^5, \text{л/с}$	$q_{v10}, \text{Вт/м}^3$	$\gamma, \text{1/м}$	$\beta, \text{1/м}$
1	160	2,67	760	32,5	-2,7
2	240	10,7	920	32,5	-2,7
3	400	15,1	1500	32,5	-2,7

Значення  $q_{v10}$ , використовуване в розрахунку, було отримано по відповідності розрахункових і

експериментальних температур. При розрахунку  $q_{v10}$  за значенням вихідної потужності магнетрона

й з урахуванням ККД значення відрізнялися, причому ці розходження збільшувалися зі збільшенням вихідної потужності магнетрона. На рис. 1 наведені графіки зміни вологовмісту (а), побудованого відповідно до експериментальних даних по швидкості сушіння в першому періоді, і температури (б) залежно від потужності мікрохвильового джерела. Розрахунки виконані за вихідними дани-

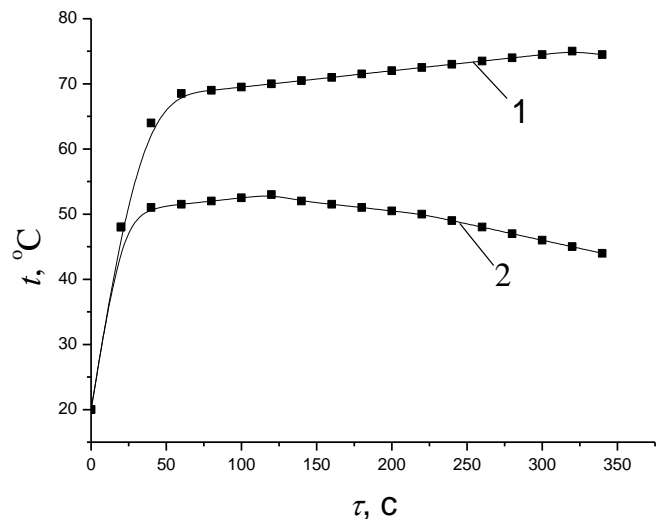


**Рисунок 1** – Зміна локального вологовмісту (а) і температури (б) при  $P_{\text{вих}} = \text{var}$  у перетині  $x = 0,015$  м:  
 1-1 –  $P_{\text{вих}} = 160$  Вт; 2-2 –  $P_{\text{вих}} = 240$  Вт; 3-3 –  $P_{\text{вих}} = 400$  Вт

Видно, що з ростом вихідної потужності магнетрона температура матеріалу збільшується, а вологовміст зменшується. Для заданих умов можна встановити максимальне значення теплового потоку, що підводиться, при якому не буде перевищуватися припустима для даного матеріалу температура. Слід зазначити, що одержувані рішення коректні за умови, що температура матеріалу не перевищує температуру його поверхні більш ніж на 12 %. На рис. 2 показаний вплив температури поверхні на температуру матеріалу (зерно пшениці), що розраховується по залежності (5).

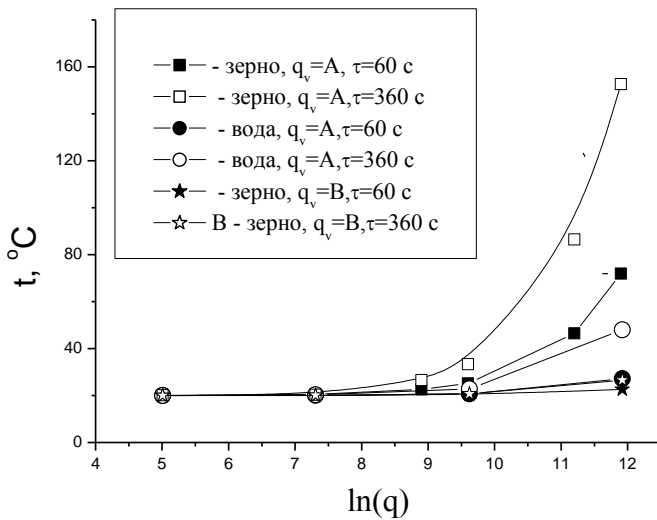
При початковій температурі матеріалу  $t_0 = 50$  °C і температурі поверхні  $t_{\text{пов}} = 70$  °C після початкової ділянки, що відповідає прогріву, темп зміни температури помітно знижується, однак спостерігається її деякий ріст за часом (крива 1), що відповідало спостережуваному в експерименті. При температурі поверхні  $t_{\text{пов}} = 35$  °C температура після періоду нагрівання знижується, що не відповідало реальному процесу. Таким чином, адекватність моделі залежить від початкового розподілу температур.

ми табл. 1. Із часом температура зростає, причому період прогріву ріст відбувається більш стрімко. Темп зміни температури в періоді постійної швидкості сушіння практично не залежить від потужності позитивного джерела (мікрохвильове поле) в обраному діапазоні його зміни (рис. 1, б), що пов'язане із впливом, що компенсує, збільшення негативного джерела (потік вологи, що випарувалося).



**Рисунок 2** – Зміна температури матеріалу в перетині  $x = 0,015$  м при різних значеннях температури поверхні  $t_{\text{пов}}$ . Вихідна потужність магнетрона  $P_{\text{вих}} = 400$  Вт, маса матеріалу (овес)  $m = 0,3$  кг: 1 –  $t_{\text{пов}} = 70$  °C, 2 –  $t_{\text{пов}} = 35$  °C.

На рис.3 наведені криві, отримані за результатами розрахунків температур за залежністю (5). Матеріал – зерно пшениці і вода.

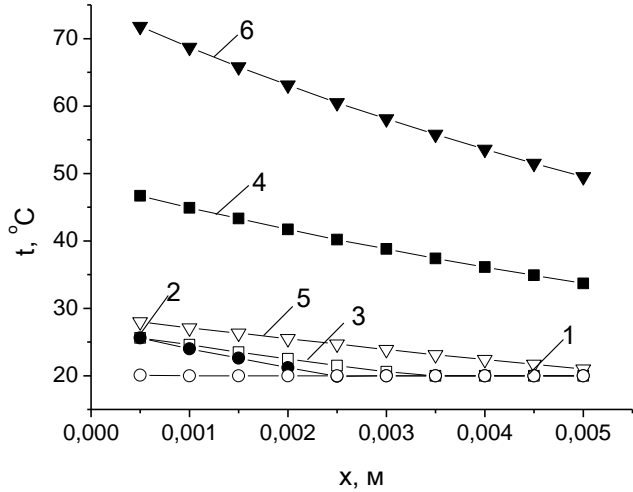


**Рисунок 3** – Зміна температури матеріалу в залежності від питомої потужності внутрішніх джерел і виду матеріалу

Вихідні дані для розрахунку наступні: початкові температури матеріалу і середовища  $t_c = t_0 = 20^\circ\text{C}$ , коефіцієнт поглинання води  $\gamma_v = 125 \text{ м}^{-1}$ , коефіцієнт поглинання зерна  $\gamma_3 = 30 \text{ м}^{-1}$ . Розрахунок для води і зерна при однакових значеннях питомої потужності внутрішніх джерел теплоти  $q_{v1} = A = 1,5 \cdot 10^5 \text{ (Вт/м}^3\text{)}$  показав, що температурні криві для води розташовуються нижче кривих для зерна. Це пояснюється тим, що для отримання питомої потужності в зерні такого ж значення, як і в воді, потрібно більш потужне джерело мікрохвильової енергії, тому що внаслідок значної розбіжності значень коефіцієнта втрат кількість енергії, перетвореної в теплову, буде істотно відрізняться. Так, для води при  $20^\circ\text{C}$   $\epsilon'' = 82$ , для зерна орієнтовно  $\epsilon'' = 2,6$ . З метою коректного зіставлення температур для води і зерна, слід враховувати значення діелектричних характеристик матеріалу. Розрахунок температур зерна, проведений при  $q_{v1} = B = 7500 \text{ Вт/м}^3$  (що враховувало зміну питомої потужності внутрішніх джерел при вихідній потужності, що відповідає умовам нагріву води в мікрохвильовому полі), привів до вірного розподілу температурних кривих. У цьому випадку температура зерна нижче, ніж температура води, і їх значення корелюються з експериментальними. Для всіх варіантів розрахунку збільшення експозиції в мікрохвильовому полі призводить до збільшення температури.

На рис. 4 наведені результати розрахунку температури матеріалу в залежності від координати, відлічуваної від поверхні масиву. Матеріал – вода

і зерно пшениці, початкова температура дорівнює  $t_c = t_0 = 20^\circ\text{C}$ . Лінії 1,2 отримані для  $\tau = 60 \text{ с}$ , лінії 3,4 – для  $\tau = 360 \text{ с}$ , лінії 5,6 – для  $\tau = 600 \text{ с}$ . Внаслідок низьких значень діелектричних характеристик щодо характеристик води, швидкість нагріву води вище.



**Рисунок 4** – Температура масиву в залежності від координати при різній експозиції в мікрохвильовому полі. Лінії 1,3,5 – зерно; 2,4,6 – вода.

На початковому етапі нагріву через велике значення коефіцієнта поглинання температура змінюється не на всіх координатних точках, а на певній відстані від початку координат, за межами якої температура залишається постійною. При збільшенні експозиції зміна температурного поля охоплює наступні шари, що пов'язано з перенесенням теплоти теплопровідністю.

## 2.2. Температурне поле тіла з безперервно діючими джерелами теплоти в напівобмеженому масиві при граничних умовах III роду

Математичне формулювання даного завдання в диференціальній формі представлені залежностями (1-3), однак в умову однозначності включалася гранична умова:

$$\alpha(t(0, \tau) - t_{\text{пов}}) = -\lambda \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x}, \quad (6)$$

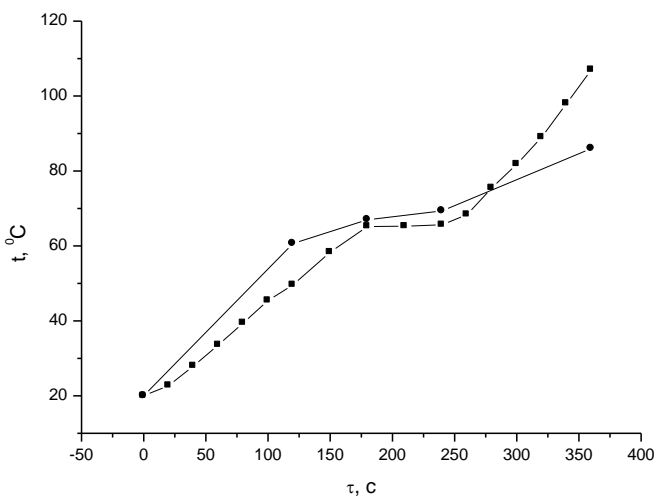
де  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі,  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності.

Застосовуючи перетворення Лапласа, було отримане рішення задачі в явному вигляді [3, 4].

Отримана залежність дозволяє розрахувати температурне поле для трьох періодів сушіння: нульового (період прогріву), першого (період постійної швидкості сушіння) і другого (період падаючої швидкості сушіння). Відмінності в періодах задаються відповідними значеннями величин, що входять у вихідні дані. Так, для нульового періоду приймається, що вода не випаровується, тобто негативне джерело теплоти дорівнює нулю. У першому періоді варто задатися швидкістю сушіння  $W$ , що визначає значення негативного джерела:  $q_{v20} = -rWr$  ( $r$  – питома теплота паротворення). Швидкість сушіння при проведенні розрахунків визначається даними експериментів.

Для оцінки відповідності отриманої моделі реальним фізичним процесам, що проходять при сушінні щільного шару матеріалу в умовах дії внутрішніх джерел теплоти, проведені розрахунки при різних значеннях коефіцієнтів тепловіддачі, питомої потужності магнетронів (позитивне джерело), коефіцієнта температуропровідності матеріалу. Вихідні дані для розрахунку відповідали умовам окремих експериментів [9]. Матеріал для досліджень – овес із початковим вологовмістом  $u = 0,2$  і масою  $m = 0,1$  кг, вихідна потужність магнетрона – від 100 до 600 Вт. Теплофізичні властивості шару розраховувалися як ефективні величини з урахуванням його порозності  $\varepsilon = 0,4$ .

Розрахункові й експериментальні дані по температурі поверхні матеріалу задовільно корелюються (рис. 5).



**Рисунок 5** – Температура поверхні матеріалу, визначена експериментально (●) і аналітично (■). Коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha = 15 \text{ Вт} / (\text{м}^2\text{К})$ , вихідна потужність магнетрона  $P_{\text{вих}} = 180 \text{ Вт}$

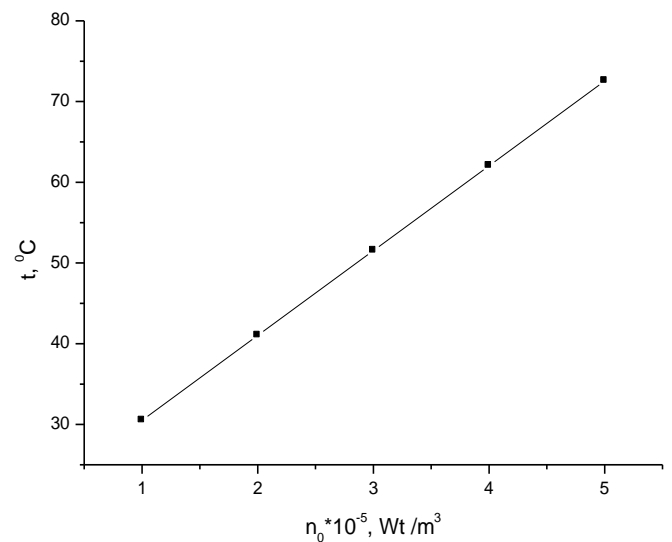
Коефіцієнт теплопровідності:  $\lambda_{\text{еф}} = 3 \cdot \pi \cdot \lambda_{\text{п}} \times \lg(0,74 - 0,31 \beta) / (0,74 - \beta)$ , Вт/(м·К), коефіцієнт температуропровідності  $a_{\text{еф}} = \lambda_{\text{еф}} / \rho_{\text{ш}} c_{\text{ш}}$ , м/с, густина шару  $\rho_{\text{ш}} = \rho_r (1 - \varepsilon)$ , кг/м<sup>3</sup>, теплоємність шару  $c_{\text{ш}} = c_{\text{п}} \cdot \varepsilon + c_{\text{т}} (1 - \varepsilon)$ , Дж/(кг·К),  $\beta = (1 - \varepsilon) - \text{об'ємна концентрація часток}$  [9]. Індекс «п» відповідає повітряній (газовій) фазі, «т» – твердим часткам.

При розрахунках швидкість сушіння вибиралася у відповідності зі значеннями, отриманими в експерименті. Ці дані наведені в табл. 2.

**Таблиця 2** – Експериментальні дані по швидкості сушіння щільного шару зерна вівса

Час сушіння $\tau$ , с	Швидкість сушіння $W$ , с <sup>-1</sup>
0	0
120	$5,8 \cdot 10^{-5}$
180	$2,0 \cdot 10^{-4}$
240	$2,0 \cdot 10^{-4}$
360	$6,0 \cdot 10^{-4}$
620	$4,1 \cdot 10^{-4}$

Розрахунки показують, що зі збільшенням питомої потужності позитивного джерела температура поверхні зростає (рис. 6).



**Рисунок 6** – Вплив питомої потужності магнетрона на температуру поверхні матеріалу. Коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha = 15 \text{ Вт} / (\text{м}^2\text{К})$ .

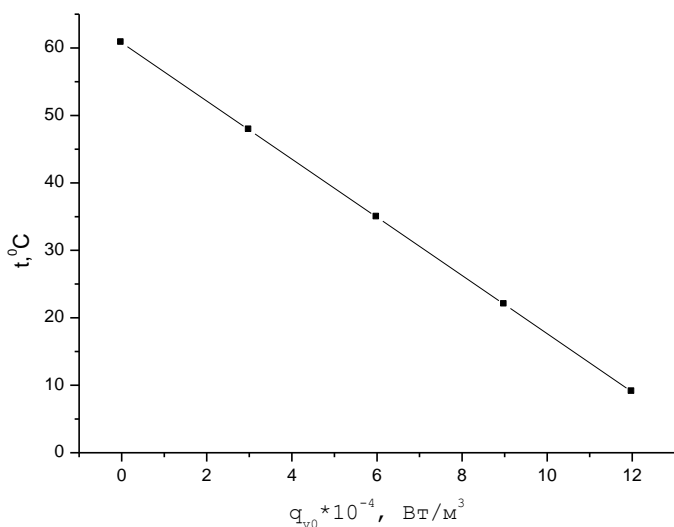
При проведенні розрахунків приймалося, що процес проходить у нульовому періоді (період прогріву). Аналіз впливу коефіцієнта  $\gamma$  на температурне поле усередині тіла показав, що задовільні результати по розподілу температури по глибині матеріалу (при урахуванні його теплофізичних характеристик) виходять при  $\gamma = 35 \text{ м}^{-1}$ , що корелю-

ється з експериментальними даними. Величина  $\gamma$  зв'язана із глибиною проникнення  $\Delta$ : зі збільшенням  $\gamma$  зменшується глибина проникнення, що приводить до швидкого загасання електромагнітної енергії. У цьому випадку більша частина мікрохвильової енергії поглинається поверхневими шарами й температура їх буде вище, ніж при меншому значенні  $\gamma$ . Це відображається результатами розрахунку. Так, при  $\gamma = 1$  температура на поверхні через 20 с становить  $t = 36,09$  °С, на глибині  $x = 0,01$  м температура  $t = 56,0$  °С. За тих самих умов (овес масою 100 г, початкова температура 20°С,  $\tau = 20$  с), але при  $\gamma = 70$  м<sup>-1</sup> на поверхні матеріалу встановиться температура  $t = 32,98$  °С, а на глибині  $x = 0,01$  м –  $t = 64,3$  °С.

Зі збільшенням внеску випаровування, тобто негативного джерела теплоти, температура матеріалу знижується, що відповідає реальному процесу. Досліджено характер зміни температури в умовах дії негативного джерела теплоти. Зі збільшенням його значення температура матеріалу падає (рис. 7), що пов'язане із втратою енергії за рахунок випаровування.

Видно, що найвища температура матеріалу буде при нульовому значенні питомої потужності негативного джерела (тобто відсутності випаровування).

Розрахунок температури при різних значеннях коефіцієнта ослаблення  $\beta$  показав, що при його збільшенні температура матеріалу росте, що пов'язане зі зменшенням внеску випаровування.



**Рисунок 7** – Залежність температури матеріалу від питомої потужності негативного джерела теплоти:  $x = 0$  м,  $\tau = 120$  с,  $\beta = 1,025$

У той же час отримана залежність виявила області, для яких розрахунки не відповідають реальній фізичній картині. При значеннях  $q_{v10} \geq 0,3 \cdot 10^5$  Вт/м<sup>3</sup> температурне поле в тілі не відповідає дійсному: починаючи з певної глибини, температура матеріалу починає знижуватися, приймаючи значення, менше заданого. Також збільшення коефіцієнта тепловіддачі  $\alpha > 20$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) (при масі завантаження 0,1 кг і вихідної потужності магнетрона 450 Вт) розрахункова температура поверхні приймала значення, що істотно відрізняються від реальних.

### 2.3. Середня температура тіла з безперервно діючими джерелами теплоти при граничних умовах III роду

Подальші дослідження моделей теплопровідності із внутрішніми джерелами теплоти почато з метою визначення можливості розрахунковим шляхом одержувати дані по середній температурі матеріалу, що представляє значимість для складання алгоритмів розрахунку процесу нагрівання матеріалів у мікрохвильовому полі. Подібні моделі наведені в [1], на підставі яких отримані залежності для температур. Для перевірки відповідності рішень [1] фізичної моделі нагрівання в мікрохвильовому полі проведені обчислення по залежності (7), отриманої для середньої температури сфери для умов, що відповідають режимам мікрохвильового нагрівання в реальних об'єктах:

$$\bar{\Theta} = \frac{t(\tau) - t_0}{t_c - t_0} = 1 + \frac{1}{15} Po \left( 1 + \frac{5}{Bi} \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{Po}{\mu_n^2} \right) B_n \exp(\mu_n^2 Fo), \tag{7}$$

де  $Po = (q_{v1}^2 R^2) / (\lambda(t_0 - t_c))$  – критерій Померанцева;  $q_{v1}$  – питома потужність внутрішніх джерел теплоти, Вт/м<sup>3</sup>,  $t_0$  – початкова температура матеріалу,  $t_c$  – температура навколишнього середовища,  $Bi = (\alpha \cdot R_0) / \lambda$  – число Біо;  $Fo = (a_m \cdot \tau) / R_0^2$  – число Фур'є;  $\mu_n$  – характеристичні числа. Рішення (7) отримане при граничних умовах III роду.

Необхідність перевірки відповідності викликана тим, що для всіх рішень [1], що описують температурне поле при дії внутрішніх джерел теплоти, зазначалася умова  $t_c > t_0$ .

У табл. 3 наведені дані, отримані при розра-

хунку температури тіла сферичної форми з визначальним розміром  $R_0 = 0,3$  м. Температура навколишнього середовища  $t_0 = 20$  °С, початкова темпе-

ратура тіла  $t_{\text{поч}} = 40$  °С, коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha = 5$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Теплофізичні властивості відповідали властивостям води.

**Таблиця 3** – Зміна температури води в умовах дії внутрішніх джерел теплоти:  $t_0 = 20$  °С,  $t_{\text{поч}} = 40$  °С

$q_{v10}$ , Вт/м <sup>3</sup>	$\tau = 10$ с	$\tau = 60$ с	$\tau = 180$ с	$\tau = 360$ с
100	39,90	39,89	39,89	39,88
10000	17,70	18,67	20,60	23,49
1000000	-184,10	-174,30	-154,78	-125,52

При невеликій питомій потужності внутрішніх джерел теплоти ( $q_{v10} = 100$ ) температура матеріалу приймає реальні значення. При  $q_{v20} = 10000$  температура не відповідає дійсній, однак відзначається тенденція до її росту із часом, і при ще більшому збільшенні  $q_{v10}$  розрахунок стає зовсім невірним – температура приймає негативні значення й згодом зменшується.

У табл. 4 наведені результати розрахунку для наступних умов: температура середовища  $t_0 = 400$  °С, початкова температура тіла  $t_{\text{поч}} = 20$  °С, коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha = 25$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Видно, що дані відповідають реальним фізичним уявленням: температура матеріалу із часом росте, збільшення потужності внутрішніх джерел також приводить до росту температури.

**Таблиця 4** – Зміна температури води в умовах дії внутрішніх джерел теплоти:  $t_0 = 400$  °С,  $t_{\text{поч}} = 20$  °С

$q_{v10}$ , Вт/м <sup>3</sup>	$\tau = 10$ с	$\tau = 60$ с	$\tau = 180$ с	$\tau = 360$ с
100	23,59	24,35	26,11	28,72
10000	23,65	24,35	26,14	28,77
1000000	24,17	25,20	28,90	34,36

Слід зазначити, що залежність для безрозмірної надлишкової середньої температури (7) була отримана з рішення для локальних температур. Для оцінки застосовності точних аналітичних рішень до моделювання розвитку температури при дії внутрішніх джерел виникла необхідність перевірки відповідності математичних моделей і реальних об'єктів при зміні напрямку теплового потоку.

### 3. Висновки

Аналітична теорія теплопровідності тіл в умовах дії двох джерел теплоти, позитивного й негативного, заснована на уявленні речовини як суцільного середовища, допускає модельне подання дисперсних структур введенням ефективних коефіцієнтів теплопровідності й температуропровідності, що підтверджується тим, як задовільно корелюються розрахункові та експериментальні дані.

Аналітичні залежності для розрахунку температур матеріалу при сушінні, отримані з рішення рівняння теплопровідності з урахуванням двох джерел теплоти: позитивного, обумовленого дією мікрохвильового поля, і негативного, виникаючого

внаслідок виходу потоку енергії з вологою, що випарувалася, задовільно працюють в області режимних параметрів, що відповідають режимам сушіння зернових: початковий  $u = 0,2$  вологовміст кг/кг, швидкість  $W = 10^{-5} \dots 10^{-4}$  сушіння с<sup>-1</sup>.

Рішення завдань теплопровідності в умовах дії одного (позитивного) або двох (позитивного і негативного) джерел теплоти, засновані на диференціальному рівнянні теплопровідності параболічного виду, дозволяють одержувати достовірні дані при значеннях питомої потужності внутрішніх позитивних джерел теплоти, характерних для умов обробки матеріалів рослинного походження.

Для одержання достовірних даних по температурах матеріалу по аналітичним залежностям, отриманим для безрозмірної надлишкової температури, потрібне виконання умови  $t_c > t_0$  (температура середовища вище температури матеріалу).

Для одержання розрахункових даних по температурам у періоді постійної й падаючої швидкості сушіння необхідно мати у своєму розпорядженні надійні дані за значенням швидкості сушіння з метою оцінки величини негативного джерела теплоти.

## Література

1. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.
2. **Radha Raman Mishra, Apurbba Kumar Sharma.** Microwave–material interaction phenomena: Heating mechanisms, challenges and opportunities in material processing. Composites Part A // Applied Science and Manufacturing. – 2016. – Vol. 81. – P. 78-97.
3. **Волгушева Н. В.** Кинетика сушки плотного слоя дисперсного материала (на примере гречихи) при различных способах подвода теплоты // дисс. канд. техн. наук: 05.14.05. – О.: 2005. – 225 с.
4. **Дементьева Т. Ю.** Аналитическое представление процесса микроволновой сушки зерна // Всеукраїнська науково-практична конференція «Проблеми енергоефективності та якості в процесах сушіння харчової сировини». – Збірник наукових праць ХДУХТ, 2011. – С. 17–18.
5. **Калинин Л. Г., Бошкова И. Л.** Особенности режима сушки макаронных изделий // Наукові праці ОНАХТ. – 2007. – Вип. 30. – Т.1. – С. 133-137.
6. **Календерьян В. А., Бошкова И. Л., Волгушева Н. В.** Математические модели теплопереноса в процессе сушки дисперсных материалов в плотном движущемся слое при различных способах подвода теплоты // Холодильна техніка і технологія. – 2008. – № 11(11). – С. 65-68.
7. **Календерьян В.А., Бошкова И.Л., Волгушева Н.В., Островская Е.В.** Математические модели теплопереноса в процессе сушки дисперсных материалов при использовании микроволновой энергии // Пищевая наука и технология. – 2008. – №1. – С. 51-54.
8. **Гинзбург А. С., Громов М. А.** Теплофизические свойства зерна, муки и крупы. – М.: Колос, 1984. – 304 с.
9. **Календерьян В.А., Бошкова И.Л., Волгушева Н.В., Дементьева Т. Ю.** К оценке эффективности сушки зерновых культур в неподвижном слое при различных режимах подвода энергии // Наукові праці ОНАХТ. – 2011. – Вип. 39. – Т.2. – С. 211-215.

---

Отримана в редакції 18.10.2020, прийнята до друку 08.12.2020

## Solution of the problems of thermal conductivity in the material with the action of two heat sources

**I. Boshkova<sup>1</sup>✉, N. Volgusheva<sup>2</sup>, M. Potapov<sup>3</sup>, N. Kolesnichenko<sup>4</sup>, O. Bondarenko<sup>5</sup>**

<sup>1-5</sup>Odessa National Academy of Food Technologies, 112 Kanatnaya Str., Odessa, 65039, Ukraine

✉ e-mail: <sup>1</sup>boshkova.irina@gmail.com; <sup>3</sup>doroshlgan@gmail.com; <sup>4</sup>kolesnychenko.natalia@gmail.com

ORCID: <sup>1</sup><http://orcid.org/0000-0001-5989-9223>; <sup>2</sup><http://orcid.org/0000-0002-9984-6502>; <sup>3</sup><https://orcid.org/0000-0002-6847-5745>; <sup>4</sup><http://orcid.org/0000-0002-2851-8050>; <sup>5</sup><https://orcid.org/0000-0002-0111-0768>

*The paper analyzes mathematical models representing the heating of bodies in a microwave electromagnetic field, taking into account mass transfer, for example, during evaporation of moisture. The research is based on the approaches proposed by O.V. Lykov, which are based on the heat conduction equation taking into account internal sources of heat, which can be both positive and negative. The volumetric nature of material heating in a microwave field allows us to consider the material as a medium in which internal positive sources of heat act. The negative heat source is associated with the flow of evaporated moisture. Models describing thermal conductivity in a semi-bounded massif under boundary conditions of the I and III kind are considered. Solving the models in an implicit (differential) form led to obtaining dependencies for calculating local temperatures in the body. The analysis of the calculated data on the distribution of moisture content and temperature of the material during drying with microwave energy supply is carried out. The results of calculations are presented for different values of the heat transfer coefficients, the specific power of magnetrons, and the thermal diffusivity of the material. The correspondence of the calculated values to real physical processes was obtained. At the same time, areas were found for which the calculations do not correspond to the real physical picture. Limitations on applicability for specific heat flux density and heat transfer coefficient*

are determined. Analytically investigated the average body temperature with continuously operating sources of heat under boundary conditions of the third kind. It was found that in order to obtain reliable data on the temperatures of the material from the analytical dependences obtained for the average dimensionless excess temperature, the condition must be met  $t_c > t_0$  (the ambient temperature is higher than the temperature of the material).

**Keywords:** Mathematical model; Boundary conditions; Temperature; Moisture content; Areas of applicability

## References

1. **Lykov, A.V.** (1967) Theory of heat conduction. Moscow: Higher school, 600.
2. **Mishra, R.R., Sharma, A.K.** (2016) Microwave-material interaction phenomena: Heating mechanisms, challenges and opportunities in material processing. Composites Part A. *Applied Science and Manufacturing*, 81, 78-97.
3. **Volgusheva, N.V.** (2005) Kinetics of drying a dense layer of dispersed material (for example, buckwheat) with different methods of heat supply. *Diss. Cand. Tech. Sciences: 05.14.05. Odessa*, 225.
4. **Dementieva T.Yu.** (2011) Analytical presentation of the process of microwave drying of grain. *All-Ukrainian scientific-practical conference "Problems of energy efficiency and quality in the processes of drying food raw materials". Zbirnyk naukovykh prats KhDUHT*, 17-18.
5. **Kalinin, L.G., Boshkova, I.L.** (2007) Features of the mode of drying pasta. *Science works ONAFT*, 30(1), 133-137.
6. **Kalenderian, V.A., Boshkova, I.L., Volgusheva, N.V.** (2008) Mathematical models of heat transfer in the process of drying dispersed materials in a dense moving layer with different methods of heat supply. *Refrigeration engineering and technology*, 11 (11), 65-68.
7. **Kalenderian, V.A., Boshkova, I.L., Volgusheva, N.V., Ostrovskaya, E.V.** (2008) Mathematical models of heat transfer in the process of drying dispersed materials using microwave energy. *Food Science and Technology*, 1, 51-54.
8. **Ginzburg, A.S., Gromov, M.A.** (1984) Thermophysical properties of grain, flour and groats. Moscow: Kolos, 304.
9. **Kalenderian, V.A., Boshkova, I.L., Volgusheva, N.V., Dementieva, T. Yu.** (2011) On the assessment of the efficiency of drying grain crops in a fixed bed with different modes of energy supply. *Science works ONAFT*, 39(2), 211-215.

---

Received 18 October 2020  
 Approved 08 December 2020  
 Available in Internet 11 January 2021