Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 10, no. 2 (2017) pp. 47–55

CC BY ONAFT Open Access

О “шестиугольных” решениях некоторых уравнений в частных производных

А. М. Шелехов

Abstract. For some famous PDE we find the solutions corresponded to hexagonal three-webs.

Аннотация. Для некоторых известных уравнений в частных производных найдены решения, которым соответствует шестиугольная три-ткань.

1. Введение. Всякое решение

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

дифференциального уравнения определяет на плоскости переменных x, y три-ткань W — три семейства линий

$$x = \text{const}, \qquad y = \text{const}, \qquad f(x, y) = \text{const},$$

см. [1]. Это дает возможность, с одной стороны, использовать геометрию три-тканей для описания свойств решений дифференциальных уравнений, с другой — классифицировать три-ткани по типу решений. Уравнение (1) связывает параметры x, y и z линий три-ткани W, проходящих через одну точку, и называется уравнением этой ткани. Функция f называется *функцией ткани* W.

Самые простые три-ткани — параллельные — образованы семействами параллельных прямых. Эквивалентные (локально диффеоморфные) им три-ткани называются параллелизуемыми или регулярными. Регулярные три-ткани (и только они) допускают максимальную (трехпараметрическую) группу автоморфизмов, [4]. Другая их характеристика состоит в том, что на них замыкаются конфигурации Томсена (T), изображенные на рис. 1.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, криволинейная три-ткань, регулярная три-ткань, конфигурация Томсена на три-ткани, шестиугольная конфигурация

DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v10i2.653

Здесь линии первого, второго и третьего семейств ткани изображаются вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями соответственно. При этом вертикальные линии отмечены параметрами x_α, горизонтальные — параметрами y_α, наклонные — параметрами z_α. Строится фигура T, например, следующим образом. Берем две произвольные линии x_1 и y_1 из первого и второго семейств, затем достаточно близко к точке их пересечения проводим наклонные линии z_1 и z_2. Через получившиеся точки пересечения проводим вертикальные и горизонтальные линии x_2 и y_2, x_3 и y_3, как показано на рис. 1. Получим точки A и B. Полученная конфигурация называется *фигурой Томсена* или T. Если точки A и B лежат на одной линии третьего семейства ткани, то говорят, что фигура T замыкается.

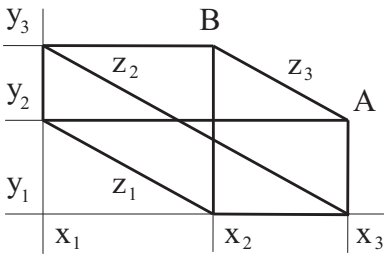

Рис. 1.

В частности, если линии x_2, y_2 и z_2 проходят через одну точку, то конфигурация Томсена называется *шестиугольной* конфигурацией или фигурой H. Поэтому регулярные ткани называют еще *шестиугольными.*

Известно [1], [4], что уравнение (1) определяет регулярную три-ткань тогда и только тогда, когда оно имеет вид

$$z = f(\alpha(x) + \beta(y)). \tag{2}$$

В этой статье мы рассматриваем некоторые известные уравнения в частных производных и ищем их решения вида (2). Такие решения можно назвать “шестиугольными”. Рассмотрены уравнение Эйлера для однородных функций, уравнение Лапласа, уравнение теплопроводности и уравнение колебания.

В некотором смысле эта статья дополняет работы [2], [3], в которых рассматривались три-ткани, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Все рассматриваемые в работе функции считаются вещественно-аналитическими.

2. Пусть f — дифференцируемая однородная функция степени k. Тогда f удовлетворяет известному уравнению Эйлера

$$xf_x + yf_y = kf. \tag{3}$$

С другой стороны, пусть f имеет вид (2). Тогда

$$f_x = f'\alpha', \qquad f_y = f'\beta', \tag{4}$$

где штрих обозначает производную по аргументу $\theta = \alpha + \beta$.

Подставляя в (3), получим

$$xf'\alpha'(x) + yf'\beta'(y) = kf,$$

откуда следует

$$d\ln f = k\frac{d(\alpha+\beta)}{x\alpha'(x) + y\beta'(y)}. \tag{5}$$

Поэтому,

$$\frac{k}{x\alpha'(x) + y\beta'(y)} = \varphi(\alpha+\beta),$$

где φ — некоторая гладкая функция.

Дифференцируя последнее равенство по x и y находим отношение полученных производных:

$$\frac{x\alpha''(x)}{\alpha'(x)} = \frac{y\beta''(y)}{\beta'(y)}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от x, правая – только от y. Следовательно, это отношение есть постоянная, обозначим ее c. Тогда после интегрирования получим:

$$\alpha'(x) = ax^c, \qquad \beta'(y) = by^c,$$

где a и b — постоянные. Подставляя в (5), найдем f и уравнение рассматриваемой три-ткани:

$$z = p(ax^{c+1} + by^{c+1})^{\frac{k}{c+1}}, \tag{6}$$

где p — постоянная. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Решение уравнения* (3) *имеет вид* (2) *тогда и только тогда, когда f приводится к виду* (6).

При изоморфизме $x^{c+1} \to \bar{x}, y^{c+1} \to \bar{y}, z^{c+1} \to \bar{z}$ уравнение (6) переходит в более простое:

$$\bar{z} = p(a\bar{x} + b\bar{y})^k.$$

3. Найдем подкласс регулярных три-тканей в классе тканей, определяемых гармоническими функциями. Пусть f имеет вид (2) и удовлетворяет уравнению

$$f_{xx} + f_{yy} = 0. \tag{7}$$

Из уравнений (4) вытекают равенства

$$f_{xx} = f''(\alpha')^2 + f'\alpha'', \qquad f_{yy} = f''(\beta')^2 + f'\beta''.$$

В результате уравнение (7) примет вид

$$f''\big((\alpha')^2 + (\beta')^2\big) + f'\big(\alpha'' + \beta''\big) = 0.$$

Это равенство перепишем в виде

$$\alpha'' + \beta'' = \big((\alpha')^2 + (\beta')^2\big)\, g(\alpha + \beta), \tag{8}$$

где обозначено

$$g(\alpha + \beta) = -\frac{f''}{f'}. \tag{9}$$

Продифференцировав равенство (8) по x, а затем по y, придем к уравнению

$$\alpha'\beta'\Big(g''\big((\alpha')^2 + (\beta')^2\big) + 2g'\alpha'' + 2g'\beta''\Big) = 0.$$

Так как $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ не являются постоянными, то $\alpha'\beta' \neq 0$. Приравнивая к нулю выражение в скобках, с учетом (8) получим уравнение $g'' + 2gg' = 0$, или $g'' + (g^2)' = 0$. Отсюда $g' + g^2 = c$, где c — постоянная.

В случае $c = a^2$ получим решение $g = -a\coth a(b - \theta)$, где b — постоянная.

В случае $c = -a^2$ получим решение $g = a\tan a(b - \theta)$.

В случае $c = 0$ получим решение $g = (b + \theta)^{-1}$.

В первом случае равенство (8) примет вид:

$$(\alpha + \beta)''\tanh a(b - \alpha - \beta) = -a\big((\alpha')^2 + (\beta')^2\big).$$

Тейлоровское разложение функции $\tanh a(b - \alpha - \beta)$ существенно содержит произведения вида $\alpha(x)\beta(y)$. В правой части таких слагаемых нет. Следовательно, последнее равенство возможно только в случае $(\alpha + \beta)'' = 0, (\alpha')^2 + (\beta')^2 = 0$, но тогда ткань не существует.

Точно так же рассуждаем и во втором случае.

В третьем случае равенство (8) принимает вид:

$$(\alpha + \beta)''(b + \alpha + \beta) = (\alpha')^2 + (\beta')^2. \tag{10}$$

Продифференцировав его по x и y, получим

$$\alpha'\beta''' + \alpha'''\beta' = 0. \tag{11}$$

Отсюда

$$\frac{\alpha'''}{\alpha'} = -\frac{\beta'''}{\beta'} = q = \text{const}.$$

Предположим сначала, что третьи производные не нули и пускай $q = -p^2$. Тогда решения этих уравнений имеют вид:

$$\alpha = \frac{r}{p}\cos px + \frac{s}{p}\sin px, \qquad \beta = \frac{u}{p}\cosh py + \frac{v}{p}\sinh py. \tag{12}$$

Здесь r, s, u, v — постоянные.

Подставим найденные решения в (10) и учтем, что

$$\alpha''\beta + \alpha\beta'' = \alpha\beta\left(\frac{\alpha''}{\alpha} + \frac{\beta''}{\beta}\right)\alpha\beta(-p^2 + p^2) = 0.$$

После преобразований получим:

$$bp(-r\cos px - s\sin px + u\cosh py + v\sinh py) + u^2 - v^2 = r^2 + s^2.$$

Отсюда следует, что $b = 0$ и

$$u = d\cosh\beta_0, \qquad v = d\sinh\beta_0, \qquad r = \cos\alpha_0, \qquad s = d\sin\alpha_0.$$

В результате получаем:

$$\alpha = \frac{d}{p}\cos(\alpha_0 - px), \qquad \beta = \frac{d}{p}\cosh(\beta_0 + py). \tag{13}$$

Найдем теперь f. В рассматриваемом случае равенство (9) (с учетом $b = 0$) принимает вид:

$$\frac{f''}{f'} = -\theta^{-1}.$$

Интегрируя, находим

$$f = c\ln\theta + c_1.$$

Поставляя сюда $\theta = \alpha + \beta$ и учитывая (13), окончательно получаем:

$$f = c\ln\big(\cos(\alpha_0 - px) + \cosh(\beta_0 + py)\big) + \bar{c}. \tag{14}$$

4. Рассмотрим исключённый случай

$$\alpha''' = \beta''' = 0. \tag{15}$$

Тогда

$$\alpha = \alpha_0 x^2 + 2\alpha_1 x + \alpha_2, \qquad \beta = \beta_0 y^2 + 2\beta_1 y + \beta_2.$$

Подставляя в (10) и приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, получим систему соотношений:

$$2\alpha_0(\alpha_0 + \beta_0) = 4\alpha_0^2, \qquad 2\beta_0(\alpha_0 + \beta_0) = 4\beta_0^2,$$
$$4\alpha_1(\alpha_0 + \beta_0) = 8\alpha_0\alpha_1, \qquad 4\beta_1(\alpha_0 + \beta_0) = 8\beta_0\beta_1,$$

$$(b+\alpha_2+\beta_2)(\alpha_0+\beta_0)=2(\alpha_1^2+\beta_1^2).$$

Эти соотношения сводятся к следующим:

$$\alpha_0=\beta_0, \qquad \alpha_0(b+\alpha_2+\beta_2)=\alpha_1^2+\beta_1^2.$$

Из последнего соотношения выражаем α_0 и тогда

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{b+\alpha_2+\beta_2}x^2+2\alpha_1x+\alpha_2,\\ \beta&=\frac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{b+\alpha_2+\beta_2}y^2+2\beta_1y+\beta_2.\end{aligned} \tag{16}$$

Далее находим f, интегрируя (9) при $g=(b+\theta)^{-1}$. Получим

$$f=c\ln(b+\theta)+c_1,$$

или, в силу (16),

$$f=c\ln\left(\frac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{b+\alpha_2+\beta_2}(x^2+y^2)+2\alpha_1x+2\beta_1y+\alpha_2+\beta_2+b\right)+c_1.$$

Обозначим $\alpha_2+\beta_2+b=\bar b$, тогда

$$f=c\ln\big((\alpha_1^2+\beta_1^2)(x^2+y^2)+2\alpha_1\bar bx+2\beta_1\bar by+\bar b^2\big)+\bar c.$$

Положим $\alpha_1=d\cos\varphi$ и $\beta_1=d\sin\varphi$. Тогда

$$f=c\ln\big(d^2(x^2+y^2)+2d\bar bx\cos\varphi+2d\bar by\sin\varphi+\bar b^2\big)+\bar c.$$

или

$$f=c\ln\left(x^2+y^2+2\tilde bx\cos\varphi+2\tilde by\sin\varphi+\tilde b^2\right)+\tilde c.$$

Окончательно получаем:

$$f=c\ln\left((x+\tilde b\cos\varphi)^2+(y+\tilde b\sin\varphi)^2\right)+\tilde c. \tag{17}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Криволинейная три-ткань, определяемая гармонической функцией, является регулярной тогда и только тогда, когда эта функция имеет вид* (14) *или* (17).

5. Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{18}$$

Как и выше, будем искать решения вида (2):

$$u = f(\alpha(x) + \beta(t)). \tag{2'}$$

Для них уравнение (18) примет вид:

$$f'\beta' = a^2 \left(f''(\alpha')^2 + f'\alpha''\right)$$

или

$$\beta'(t) = a^2 \left(\frac{f''}{f'}(\theta)(\alpha'(x))^2 + \alpha''(x)\right). \tag{19}$$

Продифференцируем это уравнение по x, затем по t. Так как $\alpha' \neq 0$ и $\beta' \neq 0$, получим

$$\left(\frac{f''}{f'}\right)'' (\alpha'(x))^2 + 2\left(\frac{f''}{f'}\right)' \alpha'' = 0$$

или

$$\frac{g'(\theta)}{g(\theta)} + 2\frac{\alpha''(x)}{(\alpha'(x))^2} = 0, \tag{20}$$

где обозначено

$$g = \left(\frac{f''}{f'}\right)'. \tag{21}$$

Поскольку слагаемые в уравнении (20) зависят от разных аргументов, то они являются постоянными:

$$\frac{g'(\theta)}{g(\theta)} = c, \qquad 2\frac{\alpha''(x)}{(\alpha'(x))^2} = -c.$$

Интегрируя, получим:

$$g = \left(\frac{f''}{f'}\right)' = c_1 e^{c\theta}, \tag{22}$$

откуда

$$\frac{f''}{f'} = \bar{c}_1 e^{c\theta} + c_2, \tag{23}$$

где $\bar{c}_1 = c_1 c^{-1}$, и

$$\alpha'(x) = \left(\frac{c}{2}x + c_3\right)^{-1}, \tag{24}$$

что дает

$$\alpha(x) = 2c^{-1} \ln\left(p(\tfrac{c}{2}x + c_3)\right), \tag{25}$$

где c_3 и p — постоянные.

С учетом (23)-(25) уравнение (19) примет вид:

$$\beta'(t) = a^2 p^2 \bar{c}_1 e^{c\beta(t)} + a^2 \frac{c_2 - \frac{c}{2}}{(\frac{c}{2}x + c_3)^2}. \tag{26}$$

Правая часть не зависит от x при условии

$$c_2 - \frac{c}{2} = 0, \tag{27}$$

при котором уравнение (26) принимает вид:

$$\beta'(t) = p^2 a^2 \bar{c}_1 e^{c\beta(t)}.$$

Интегрируя, находим:

$$\beta(t) = -c^{-1} \ln(-p^2 a^2 c_1 t + c_5). \tag{28}$$

Чтобы найти f следует проинтегрировать (23). В результате получим:

$$\ln f' = \frac{\bar{c}_1}{c} e^{c\theta} + c_2\theta + c_4.$$

Отсюда, с учетом (26),

$$f' = \bar{c}_4 e^{\frac{c}{2}\theta} e^{\frac{\bar{c}_1}{c} e^{c\theta}}, \qquad \bar{c}_4 = e^{c_4},$$

и, следовательно,

$$f = \bar{c}_4 \int e^{\frac{c}{2}\theta} e^{\frac{\bar{c}_1}{c} e^{c\theta}} d\theta = \frac{2\bar{c}_4}{c} \int e^{\frac{\bar{c}_1}{c} z^2} dz,$$

где обозначено $z = e^{\frac{c}{2}\theta}$. С учетом (25) и (27) находим:

$$\begin{aligned} z = e^{\frac{c}{2}\theta} &= e^{\frac{c}{2}(\alpha+\beta)} = \\ &= p\left(\tfrac{c}{2}x + c_3\right)(-p^2 a^2 c_1 t + c_5)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\tfrac{c}{2}x + c_3\right)(-a^2 c_1 t + \bar{c}_5)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

где $\bar{c}_5 = c_5 p^{-2}$. Переобозначив постоянные:

$$\frac{c}{2} = b, \qquad \frac{\bar{c}_1}{c} = b_1, \qquad c_3 = b_3, \qquad \frac{2\bar{c}_4}{c} = b_2, \qquad \bar{c}_5 = b_4,$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Криволинейная три-ткань, определенная уравнением теплопроводности* (18)*, является регулярной тогда и только тогда, когда функция u имеет вид*

$$u = b_2 \int e^{b_1 z^2} dz,$$

где

$$z = (bx + b_3)(-4a^2 b^2 b_1 t + b_4)^{-\frac{1}{2}}.$$

6. Рассмотрим уравнение колебания

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{29}$$

Как и в предыдущих случаях, ищем решения вида (2), определяющие регулярную три-ткань. Рассуждая как в п. 4 для уравнения Лапласа, придем к следующему утверждению.

Теорема 4. *Криволинейная три-ткань, определяемая решением уравнения* (29)*, является регулярной тогда и только тогда, когда функция* u *имеет вид*

$$u = c \ln \left(\cosh(\alpha_0 + px) + \cosh(\beta_0 + apt)\right) + \bar{c}.$$

или

$$u = c \ln \left((x + \tilde{b}\cosh\varphi)^2 - (at - \tilde{b}\sinh\varphi)^2\right) + \tilde{c}.$$

Литература

[1] В. Бляшке. *Введение в геометрию тканей.* Гос. издат. Физ.-мат. лит., 1959.

[2] А. А. Уткин, М. А. Шелехов. О три-тканях, определяемых линейным дифференциальным уравнением первого порядка. *Изв. вузов. Матем.*, 11(474):54–57, 2001.

[3] А. А. Уткин, М. А. Шелехов. Три-ткани, определяемые уравнением Риккати. *Изв. вузов. Матем.*, 11(510):87–90, 2004.

[4] А. М. Шелехов, В. Б. Лазарева, Уткин А. А. *Криволинейные три-ткани.* Тверь, 2013, 237 с.

Поступила в редакцию 28 июля 2017, принята к печати 10 августа 2017.

Александр Михайлович Шелехов
Россия, Тверь, ул. 15 лет Октября, 13, кв. 153
Email: amshelekhov@rambler.ru