

Властивості спряжених функцій у гіперкомплексному просторі

М. В. Стефанчук

Abstract. We introduce new notions of linearly convex and conjugated functions in multidimensional hypercomplex space being a n -product of quaternions. There are investigated properties of these objects.

Анотація. В даній роботі вводиться поняття лінійно опуклих та спряжених функцій у n -вимірному гіперкомплексному просторі $\mathbb{H}^n$, досліджуються їхні властивості.

1. ЛІНІЙНО ОПУКЛІ ФУНКЦІЇ

В даній роботі ми узагальнюємо деякі результати щодо багатозначних функцій у комплексному просторі $\mathbb{C}^n$ (див. [1]) на n -вимірний гіперкомплексний простір $\mathbb{H}^n$, $n = 1, 2, \dots$, що є прямим добутком n -копій тіла кватерніонів $\mathbb{H}$ ($\mathbb{H}^1 := \mathbb{H}$) [2], [3]. Для довільної пари

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{H}^n$$

визначимо скалярний добуток $\langle x, y \rangle$ за формулою:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{m=1}^n x_m y_m.$$

Означення 1.1. Функція $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ називається *багатозначною*, якщо образом точки $x \in \mathbb{H}^n$ є множина $f(x) \in \mathbb{H}$.

Область визначення такої функції будемо позначати через

$$E_f := \{x \in \mathbb{H}^n \mid \text{існує таке } y \in \mathbb{H}, \text{ що } y = f(x)\}.$$

Означення 1.2. Функція $l: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ називається *афінною*, якщо її графіком є гіперплощина.

УДК 514.17, 517.55

Ключові слова: багатозначна функція, афінна функція, лінійно опукла функція, спряжена функція

DOI: <http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v10i2.652>

Означення 1.3. Багатозначна функція $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ називається *лінійно опуклою*, якщо для довільної пари точок $(x_0, y_0) \in (\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}) \setminus \Gamma(f)$ існує афінна функція $l: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$, така, що $y_0 = l(x_0)$ і $\Gamma(l) \cap \Gamma(f) = \emptyset$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$, де через $\Gamma(l)$ та $\Gamma(f)$ позначено графіки функцій l та f відповідно.

Означення 1.4. *Лінійно угнутою* функцією називається така багатозначна функція $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$, для якої функція $\varphi = \mathbb{H} \setminus f \in$ лінійно опуклою.

Це означає, що $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \Gamma(f)$ є графіком лінійно опуклої функції, тобто що через кожну точку $(x_0, y_0) \in \Gamma(f)$ проходить графік афінної функції, який повністю міститься у $\Gamma(f)$.

Означення 1.5. *Багатозначною афінною функцією* називається функція, лінійно опукла і лінійно угнута одночасно, і для якої знайдеться принаймні одна точка $x \in \mathbb{H}^n$, в якій кожна з множин $f(x) \cap \mathbb{H}$ та $\mathbb{H} \setminus f(x)$ є непорожньою.

Означення лінійно опуклої функції можна поширити на багатозначні функції, які приймають значення в розширеній гіперкомплексній площині $\mathbb{H}^o = \mathbb{H} \cup \{\infty\}$, компактифікованій однією точкою.

Наведемо деякі приклади лінійно опуклих функцій.

Означення 1.6. Функція

$$W_E(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in E} \langle x, y \rangle$$

називається *опорною функцією* множини $E \subset \mathbb{H}^n$.

Означення 1.7. Якщо $E \subset \mathbb{H}^n$ – лінійно опукла множина, то функція

$$\delta_E(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in E, \\ \infty, & \text{якщо } x \notin E, \end{cases}$$

називається її *індикаторною функцією*.

Легко переконатися, що опорна та індикаторна функції лінійно опуклі.

Теорема 1.8. Якщо f_α , $\alpha \in A$, є сім'єю лінійно опуклих функцій, де A — довільна множина індексів, то функція $f = \bigcap_{\alpha \in A} f_\alpha$ є лінійно опуклою.

Доведення. Маємо $\Gamma(f) = \bigcap_{\alpha \in A} \Gamma(f_\alpha)$. Візьмемо довільну точку

$$(x_0, y_0) \in (\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}) \setminus \Gamma(f) = (\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}) \setminus \bigcap_{\alpha \in A} \Gamma(f_\alpha).$$

Тоді

$$(x_0, y_0) \in (\mathbb{H}^n \times \mathbb{H}) \setminus \Gamma(f_\alpha)$$

для деякого α , а тому існує афінна функція $l: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$, графік якої не перетинає $\Gamma(f_\alpha)$. Тому він тим більше не перетинає $\Gamma(f)$. Отже, функція f є лінійно опуклою. $\square$

2. СПРЯЖЕНІ ФУНКЦІЇ

Означення 2.1. Функцією, *спряженою* з f , називається функція, що задається рівністю

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f(x)). \quad (2.1)$$

З означення спряженої функції випливає гіперкомплексний аналог нерівності Юнга-Фенхеля [1]:

$$\langle x, y \rangle \notin f(x) + f^*(y). \quad (2.2)$$

Співвідношення (2.2) можна переписати у вигляді

$$\langle x, y \rangle \in \mathbb{H} \setminus (f(x) + f^*(y)),$$

або

$$f(x) \cap (\langle x, y \rangle - f^*(y)) = \emptyset$$

при всіх $x, y \in \mathbb{H}^n$.

Знайдемо функцію, спряжену до функції f^* :

$$f^{**}(x) = (f^*)^*(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f^*(y)).$$

Приклад 2.2. Спряженою з багатозначною афінною функцією

$$f(x) = \langle x, y_0 \rangle + f(\Theta),$$

де $f(\Theta) \subset \mathbb{H}$ — множина, яка є образом точки $\Theta = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{H}^n$, є функція

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - \langle x, y_0 \rangle - f(\Theta)) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y - y_0 \rangle - f(\Theta)) = \\ &= \begin{cases} \mathbb{H}^o \setminus (-f(\Theta)), & \text{якщо } y = y_0, \\ \infty, & \text{якщо } y \neq y_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Приклад 2.3. Нехай $E \subset \mathbb{H}^n$, $\mathbb{H}^n \setminus E \neq \emptyset$ і $f(x) = \delta_E(x)$. Тоді

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - \delta_E(x)) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n \subset E} \langle x, y \rangle,$$

тобто спряженою з індикаторною функцією власної підмножини E буде опорна функція цієї множини.

Теорема 2.4. Для кожної багатозначної функції $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ справедливе включення $f \subset f^{**}$.

Доведення. Візьмемо довільну пару точок

$$x = (x_1, \dots, x_n), \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{H}^n.$$

З нерівності (2.2) отримаємо

$$\langle x, y \rangle - f^*(y) \cap f(x) = \emptyset,$$

тобто

$$\langle x, y \rangle - f^*(y) \subset \mathbb{H}^o \setminus f(x),$$

а тому

$$\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y \rangle - f^*(y)) \supset f(x).$$

Взявши в останньому включенні перетин по всіх $y \in \mathbb{H}^n$, отримаємо такі включення

$$\bigcap_{y \in \mathbb{H}^n} [\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y \rangle - f^*(y))] \supset f(x),$$

або

$$\mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f^*(y)) \supset f(x).$$

Останнє включення означає, що $f \subset f^{**}$. Теорему доведено. $\square$

Означення 2.5. Багатозначна функція $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ називається *відкритою* (відповідно, *замкненою* чи *компактною*), коли її графік є відкритою (відповідно, замкненою чи компактною) множиною в $\mathbb{H}^{n+1}$.

Теорема 2.6. Нехай $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ — багатозначна функція. Тоді спряжена до неї функція f^* є лінійно опуклою. Якщо f — відкрита, то f^* — замкнена.

Доведення. Значення спряженої функції можна записати у вигляді

$$f^*(y) = \bigcap_{x \in \mathbb{H}^n} (\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y \rangle - f(x))).$$

При фіксованому x функція

$$y \mapsto \mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y \rangle - f(x))$$

є багатозначною афінною функцією по y , а тому її можна подати у вигляді

$$y \mapsto \langle x, y \rangle + [\mathbb{H}^o \setminus (-f(x))]. \quad (2.3)$$

Отже f^* є перетином лінійно опуклих функцій виду (2.3), а тому за теоремою 1.8 f^* є лінійно опуклою функцією.

Крім того, якщо f є відкритою, то кожна з функцій (2.3) є замкненою, а отже f^* буде також замкненою. $\square$

Означення 2.7. Лінійно опукла функція називається *власною*, якщо хоча б для одного x виконується співвідношення: $f(x) \cap \mathbb{H} \neq \emptyset$ і для всіх x має місце нерівність $\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$.

Теорема 2.8. *Нехай f — власна лінійно опукла функція. Тоді f^* — власна функція.*

Доведення. Якщо $x_0 \in E_f$, то

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f(x)) \subset \mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y \rangle - f(x_0)).$$

Відповідно,

$$\mathbb{H} \setminus f^*(y) \supset \langle x_0, y \rangle - f(x_0) \neq \emptyset$$

для всіх y . З іншого боку, оскільки f — власна лінійно опукла функція, то існує афінна функція $l(x) = \langle x, y \rangle + \alpha$, графік якої не перетинає $\Gamma(f)$. Тоді для цього y матимемо, що

$$(\langle x, y \rangle + \alpha) \cap f(x) = \emptyset,$$

а отже

$$(\langle x, y \rangle - f(x)) \cap -\alpha = \emptyset,$$

і значить

$$-\alpha \subset \mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y \rangle - f(x)).$$

Тому $f^*(y) \supset -\alpha \neq \emptyset$. □

Наступна теорема [4] є гіперкомплексним аналогом теореми Фенхеля-Моро.

Теорема 2.9. *Нехай багатозначна функція $f: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$ така, що*

$$\mathbb{H} \setminus f(x) \neq \emptyset$$

*для всіх $x \in \mathbb{H}^n$. Тоді $f^{**} = f$ у тому і лише у тому випадку, коли f є лінійно опуклою.*

Доведення. Покажемо, що рівність $f^{**} = f$ рівносильна лінійній опуклості функції f .

Якщо $f^{**} = f$, то, згідно з теоремою 2.6, функція, спряжена до довільної функції, буде лінійно опуклою. Якщо $f(\mathbb{H}^n) \equiv \infty$, то рівність $f^{**} = f$ отримується з формул (2.1) і (2.2). Маємо $f^*(y) = \mathbb{H}$ для всіх $y \in (\mathbb{H}^n)^*$ і $f^{**} = \infty$. Оскільки $f \subset f^{**}$ за теоремою 2.4, то достатньо показати, що для лінійно опуклої функції справедливе обернене включення $f \supseteq f^{**}$.

Нехай в деякій точці x_0 має місце нерівність $f(x_0) \neq f^{**}(x_0)$. Тоді існує афінна функція $l(x) = \langle x, y_0 \rangle + \alpha$, така, що $\Gamma(l) \cap \Gamma(f) = \emptyset$ і $w_0 = \langle x_0, y_0 \rangle + \alpha$, де $w_0 \in f^{**}(x_0) \setminus f(x_0)$. Тоді

$$\begin{aligned} f^*(y_0) &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y_0 \rangle - f(x)) = \\ &= \bigcap_{x \in \mathbb{H}^n} [\mathbb{H}^o \setminus (\langle x, y_0 \rangle - f(x))] \supsetneq (-\alpha), \end{aligned}$$

так як $[\langle x, y_0 \rangle - f(x)] \neq -\alpha$ для всіх $x \in \mathbb{H}^n$. Для функції f^{**} справедливе включення

$$\begin{aligned} f^{**}(x_0) &= \bigcap_{y \in (\mathbb{H}^n)^*} [\mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y \rangle - f^*(y))] \subset \\ &\subset \mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y_0 \rangle - f^*(y_0)) \subset \\ &\subset \mathbb{H}^o \setminus (\langle x_0, y_0 \rangle + \alpha) = \mathbb{H}^o \setminus w_0. \end{aligned}$$

Тому $w_0 \notin f^{**}(x_0)$, що суперечить вибору точки $w_0 \in f^{**}(x_0) \setminus f(x_0)$. $\square$

Означення 2.10. Функція f називається *однорідною*, якщо

$$f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

для всіх скалярів $\lambda \in \mathbb{H} \setminus 0$.

Теорема 2.11. Нехай $f: \mathbb{H}^n \setminus \Theta \rightarrow \mathbb{H}$, $\Theta = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{H}^n$, є власною лінійно опуклою однорідною функцією і $f(\Theta) = \mathbb{H} \setminus 0$. Тоді f є опорною функцією деякої множини.

Доведення. Розглянемо множину

$$A = \{y \in \mathbb{H}^n \mid f(x) \not\geq \langle x, y \rangle \text{ для всіх } x \in \mathbb{H}^n\}$$

і покажемо, що

$$f(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y \in A} \langle x, y \rangle = W_A(x).$$

Якщо $y \in A$, то $\langle x, y \rangle \notin f(x)$ і $0 \notin \langle x, y \rangle - f(x)$ для всіх x . Відповідно,

$$f^*(y) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f(x)) = \mathbb{H}^o \setminus (\mathbb{H}^o \setminus 0) = 0.$$

Якщо $y \notin A$, то $\langle x_0, y \rangle \in f(x_0)$ для деякого $x_0 \in \mathbb{H}^n$, $x_0 \neq 0$. Тоді

$$\begin{aligned} f^*(y) &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f(x)) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus \left(f(\Theta) \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n \setminus \Theta} (\langle x, y \rangle - f(x)) \right) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus ((\mathbb{H}^o \setminus 0) \cup (\langle x_0, y \rangle - f(x_0))) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus ((\mathbb{H} \setminus 0) \cup 0) = \infty. \end{aligned}$$

Згідно з теоремою 2.8 одержуємо, що f^* є власною функцією. Тому $A \neq \emptyset$ і $f^* = \delta_A$. Беручи до уваги гіперкомплексну теорему Фенхеля-Моро 2.9 і приклад 2.3, одержуємо рівність $f = f^{**} = \delta_A^* = W_A$. Тобто f — опорна функція множини A . $\square$

Наслідок 2.12. *Якщо однорідна лінійно опукла функція $f: \mathbb{H}^n \setminus \Theta \rightarrow \mathbb{H}$ є відмінною від афінної, то*

$$f^*(y) = \delta_{E_{f^*}}(y).$$

Теорема 2.13. *Якщо $f: \mathbb{H}^n \setminus \Theta \rightarrow \mathbb{H}$ — однорідна лінійно опукла функція, відмінна від афінної, то*

$$f(x) = \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{y \in E_{f^*}} \langle x, y \rangle.$$

Доведення. Якщо f — лінійно опукла функція, то за теоремою Фенхеля-Моро $f = f^{**} = \delta^*$. Беручи до уваги приклад 2.3, переконуємось, що f є опорною функцією множини E_{f^*} . $\square$

Означення 2.14. Нехай $f_\alpha: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$, $\alpha \in A$, є багатозначними функціями. Функцію

$$(\bigcup_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcup_\alpha f_\alpha(x)$$

назвемо *об'єднанням функцій* f_α , а функцію

$$(\bigcap_\alpha f_\alpha)(x) := \bigcap_\alpha f_\alpha(x)$$

— їх *перетином*.

Для спряжених функцій має місце теорема двоїстості.

Теорема 2.15. *Нехай $f_\alpha: \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}$, $\alpha \in A$, є багатозначними функціями. Тоді виконується рівність*

$$(\bigcup_\alpha f_\alpha)^* = \bigcap_\alpha f_\alpha^*.$$

Доведення. З виразу (2.1) для спряжених функцій одержуємо

$$\begin{aligned} (\bigcup_\alpha f_\alpha)^*(y) &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - \bigcup_\alpha f_\alpha(x)) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} \bigcup_\alpha (\langle x, y \rangle - f_\alpha(x)) = \\ &= \mathbb{H}^o \setminus \bigcup_\alpha \bigcup_{x \in \mathbb{H}^n} (\langle x, y \rangle - f_\alpha(x)) = \\ &= \bigcap_\alpha (\mathbb{H}^o \setminus \bigcup_x (\langle x, y \rangle - f_\alpha(x))) = \bigcap_\alpha f_\alpha^*(y). \end{aligned}$$

Теорему доведено. $\square$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Ю. Б. Зелинский. *Выпуклость. Избранные главы*. К : Ін-т математики НАН України, 2012.
- [2] И. Л. Кантор, А. С. Солодовников. *Гиперкомплексные числа*. М : Наука, 1973.
- [3] Г. А. Мкртчян. *О гиперкомплексно выпуклых множествах*. К : ИМ АН УССР, 1987.
- [4] М. В. Стефанчук, М. В. Ткачук. Лінійно опуклі та спряжені функції в гіперкомплексному просторі. *Збірник праць Ін-ту математики НАН України*, 12(3):225–235, 2015.

Надійшла до редакції 12 серпня 2017, прийнята до друку 1 вересня 2017.

Стефанчук Марія Володимирівна

ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАН УКРАЇНИ, вул. ТЕРЕЩЕНКІВСЬКА, 3, м. Київ, 01004,
УКРАЇНА

Email: mariast@imath.kiev.ua