

Відповідний квазі-обернений ланцюговий дріб типу Тіле

Юлія Мисло

Abstract. The article derives recursive formulas for the coefficients of the power series expansion of Thiele-type quasi-inverse continued fraction.

Анотація. В статті отримані рекурентні формули для знаходження коефіцієнтів відповідного степеневому ряду квазі-оберненого ланцюгового дробу типу Тіле.

1. ВСТУП. ОСНОВНИЙ РЕЗУЛЬТАТ РОБОТИ

Функції комплексної змінної на компактї $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ наближають многочленами [3], раціональними функціями [14], апроксимантами Паде [1], ланцюговими дробами [2, 7, 15] тощо. Наближення узагальненими ланцюговими дробами в загальних функціональних просторах досліджується в [8].

У статті розглядається задача визначення коефіцієнтів відповідного степеневому ряду $c_0 + \sum_{i=0}^{\infty} c_i(z - z_0)^i$ квазі-оберненого ланцюгового дробу типу Тіле (Т-КЛД)

$$T_n = \left(b_0 + \frac{z - z_0}{b_1} + \frac{z - z_0}{b_2} + \dots + \frac{z - z_0}{b_n} \right)^{-1}. \quad (1.1)$$

Основний результат роботи — така теорема:

Теорема 1.1. *Якщо в точці $z_0 \in \mathcal{Z}$ похідні $w_k = f^{(k)}(z_0) \neq 0$, $k = \overline{0, n}$, то ненульові коефіцієнти Т-КЛД (1.1) обчислюються за такими рекурентними формулами:*

$$b_0 = \frac{1}{w_0}, \quad b_1 = \frac{-1}{b_0^2 w_1}, \quad b_2 = \frac{1}{b_0^2 b_1^2 \frac{w_2}{2!} - \frac{1}{b_0}}, \quad (1.2)$$

Ключові слова: Continued fraction, the corresponding continued fraction, quasi-inverse continued fraction of Thiele-type, formulas of coefficients

DOI: <http://dx.doi.org/10.15673/pigc.v17i2.2868>

$$\begin{aligned}
b_k = 1 / & \left(\prod_{j=1}^{k-1} b_j^2 \left(\frac{(-1)^{k-1} w_k}{k!} - \left(\frac{1}{b_1^3 b_2^2} \sum_{i_3=1}^2 \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=1}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \dots \right. \right. \right. \\
& \dots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} + \frac{1}{b_1^2 b_2^2 b_3} \sum_{i_3=1}^2 \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=1}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \dots \\
& \dots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} + \frac{1}{b_4 \prod_{j=1}^3 b_j^2} \sum_{i_4=1}^3 \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \sum_{i_5=1}^{i_4+1} \frac{1}{b_{i_5} b_{i_5+1}} \dots \quad (1.3) \\
& \left. \dots \sum_{i_{k-1}=1}^{i_{k-2}} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} + \dots + \frac{1}{b_{k-1} \prod_{j=1}^{k-2} b_j^2} \sum_{i_{k-1}=1}^{k-2} \frac{1}{b_{i_{k-1}} b_{i_{k-1}+1}} \right) \Bigg),
\end{aligned}$$

коли $k = \overline{3, n}$.

Доведена теорема аналогічна до теореми про побудову коефіцієнтів ланцюгового дробу Тіле [9].

Робота має таку структуру. В другому параграфі наведені необхідні відомості з теорії ланцюгових дробів. Окремим питанням наближення функцій ланцюговими дробами присвячено третій параграф. Допоміжні твердження про значення похідних канонічних чисельника та знаменника Т-КЛД в точці вміщено в четвертому параграфі. В цьому ж параграфі наведена формула Герріша, яка є аналогом формули Лейбніца для похідної m -го порядку частки двох функцій. Доведення основного результату роботи складає п'ятий параграф.

2. ДЕЯКІ ВІДОМОСТІ ПРО ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ

Нескінчений ланцюговий дріб вигляду

$$D = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}}$$

коротко записують так

$$D = b_0 + \bigvee_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots \quad (2.1)$$

Скінчений ланцюговий дріб, аналог частинної суми ряду

$$D_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}, \quad D_0 = b_0,$$

називають n -м наближенням, n -м підхідним дробом нескінченного ланцюгового дробу D і коротко записують аналогічним чином

$$D_n = b_0 + \mathbf{K}_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n}. \quad (2.2)$$

Елементами, частинним чисельником a_k та частинним знаменником b_k , ланцюгового дробу (2.1) можуть бути комплексні числа або функції комплексної змінної. Послідовності $\{P_n\}$ та $\{Q_n\}$, які визначаються системою різницьових рівнянь другого порядку

$$\begin{aligned} Q_{-1} &= 0, \quad Q_0 = P_{-1} = 1, \quad P_0 = b_0, \\ P_n &= b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2}, \\ Q_n &= b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

ставляться у відповідність послідовності підхідних дробів $\{D_n\}$. Елементи P_n та Q_n відповідно називаються канонічним чисельником та канонічним знаменником підхідного дробу (2.2) і $D_n = P_n/Q_n$.

Означення 2.1. Два ланцюгові дроби $b_0 + \mathbf{K}(a_i/b_i)$ та $d_0 + \mathbf{K}(c_i/d_i)$ називаються *еквівалентними*, якщо вони мають одну і ту ж послідовність підхідних дробів.

Означення 2.2. Ланцюговий дріб

$$G = \left(d_0 + \mathbf{K}_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{d_i} \right)^{-1}$$

з підхідними дробами

$$G_n = \left(d_0 + \mathbf{K}_{i=1}^n \frac{c_i}{d_i} \right)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

називається *оберненим* ланцюговим дробом до ланцюгового дробу (2.1), якщо для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ має місце рівність

$$D_n G_n = G_n D_n = 1. \quad (2.4)$$

Будемо розглядати функціональні ланцюгові дроби $\mathbf{K}(a_k(z)/b_k(z))$, де елементи $a_k(z)$, $b_k(z)$ — функції комплексної змінної.

Згідно із [5], вираз

$$L = \sum_{i=m}^{\infty} c_i z^i, \quad c_m \neq 0,$$

називається *формальним рядом Лорана* (ФРЛ), якщо c_i – комплексні числа і m – ціле число. Розвинення функції f у ряд Лорана позначимо через $\mathcal{L}(f(z))$.

Означення 2.3 ([5, 6]). Послідовність мероморфних у початку координат функцій $\{R_n(z)\}$ називається *відповідною ФРЛ* L , якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(L(z) - \mathcal{L}(R_n(z))) = \infty,$$

де

$$\lambda = \begin{cases} m, & L(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k z^k, \quad c_m \neq 0, \\ \infty, & L(z) = 0. \end{cases}$$

Порядок відповідності $R_n(z)$ ФРЛ L визначається наступним чином:

$$\nu_n = \lambda(L - \mathcal{L}(R_n(z))).$$

Означення 2.4 ([5, 6]). Ланцюговий дріб $\mathbf{K}(a_k(z)/b_k(z))$ називається відповідним ФРЛ $L(z)$, якщо кожний підхідний дріб $f_n(z)$ ланцюгового дробу є мероморфна в початку координат функція і послідовність підхідних дробів $\{f_n(z)\}$ відповідна L .

3. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

Відомі декілька підходів до побудови ланцюгових дробів різних типів, які наближають функції комплексної змінної на компактi. Серед цих підходів метод Лагранжа, що ґрунтується на розв'язанні диференціального рівняння Ріккати спеціального вигляду [7]. Коефіцієнти ланцюгового дробу знаходять через коефіцієнти розвинення функції у формальний степеневий ряд за допомогою відношення визначників Ганкеля. Також використовують розвинення відношення гіпергеометричних функцій в ланцюговий дріб [6]. Коефіцієнти ланцюгового дробу визначають за допомогою формули Тіле, яка є аналогом формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів [10, 12].

Функцію f в околі точки $z_0 \in \mathcal{Z}$ апроксимують ланцюговим дробом Тіле [10, 12]

$$f(z) = b_0 + \mathbf{K}_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_0}{b_k}, \quad (3.1)$$

який спирається на обернені похідні Тіле $^{(k)}f(z_0)$. Оборнені похідні обчислюються рекурентно:

$$\begin{aligned} {}^{(0)}f(z_0) &= f(z_0), \\ {}^{(1)}f(z_0) &= {}^{\backslash}f(z_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \\ {}^{(k)}f(z_0) &= k \cdot {}^{\backslash}({}^{(k-1)}f(z_0)) + {}^{(k-2)}f(z_0), \quad k \in \mathbb{N}_2 = \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Коефіцієнти ланцюгового дробу Тіле дорівнюють:

$$b_0 = f(z_0), \quad b_1 = {}^{(1)}f(z_0), \quad b_k = {}^{(k)}f(z_0) - {}^{(k-2)}f(z_0), \quad k \in \mathbb{N}_2.$$

Для розвинення функції також використовують Т-КЛД вигляду [15]

$$f(z) = \left(d_0 + \frac{z - z_0}{d_1} + \frac{z - z_0}{d_2} + \dots + \frac{z - z_0}{d_k} + \dots \right)^{-1}, \quad (3.2)$$

де

$$d_0 = {}^{\{0\}}f(z_0), \quad d_1 = {}^{\{1\}}f(z_0), \quad d_k = \frac{k}{({}^{\{k-1\}}f(z_0))'}, \quad k \in \mathbb{N}_2.$$

Обернені похідні 2-го типу $^{\{k\}}f(z_0)$ визначаються наступним чином

$$\begin{aligned} {}^{\{0\}}f(z_0) &= \frac{1}{f(z_0)}, \\ {}^{\{1\}}f(z_0) &= -\frac{f^2(z_0)}{f'(z_0)}, \\ {}^{\{k\}}f(z_0) &= \frac{k}{({}^{\{k-1\}}f(z_0))'} + {}^{\{k-2\}}f(z_0), \quad k \in \mathbb{N}_2. \end{aligned}$$

Мають місце взаємозв'язки між оберненими похідними, оберненими похідними 2-го типу та похідними функції f в точці. Нехай маємо розвинення функції f у формальний степеневий ряд в околі точки $z_0 \in \mathcal{Z}$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}. \quad (3.3)$$

З коефіцієнтів степеневого ряду утворимо визначник Ганкеля

$$H_0^{(n)}(z_0) = 1, \quad H_k^{(n)}(z_0) = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \cdots & c_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & \cdots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix},$$

де $c_n = 0$, коли $n < 0$ і $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 3.1 ([10]). *Якщо функція f аналітична в $\mathcal{Z}$, то обернені похідні функції визначаються через похідні функції як відношення визначників Ганкеля*

$${}^{(2k)}f(z_0) = \frac{H_{k+1}^{(0)}(z_0)}{H_k^{(2)}(z_0)}, \quad {}^{(2k-1)}f(z_0) = \frac{H_{k-1}^{(3)}(z_0)}{H_k^{(1)}(z_0)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3.2 ([15]). *Обернені похідні 2-го типу функції f в $z_0 \in \mathcal{Z}$ визначаються через похідні функції наступним чином:*

$$\{2k\}f(z_0) = \frac{H_k^{(2)}(z_0)}{H_{k+1}^{(0)}(z_0)}, \quad \{2k-1\}f(z_0) = \frac{H_{k+1}^{(-1)}(z_0)}{H_k^{(1)}(z_0)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В [15] показано, що (3.2) не буде оберненим ланцюговим дробом до (3.1) згідно із означення 2.2, оскільки співвідношення (2.4) не виконується навіть для $n = 0, 1$. Виходячи із подібності виглядів ланцюгових дробів (3.1) та (3.2) останній і отримав назву *квазі-оберненого ланцюгового дробу*.

Бачимо, що коефіцієнти Т-КЛД, аналогічно як і коефіцієнти ланцюгового дробу Тіле, можна визначити за допомогою обернених похідних 2-го типу або використовуючи визначники Ганкеля через значення коефіцієнтів формального степеневого ряду.

В [9] були отримані рекурентні формули визначення коефіцієнтів ланцюгового дробу Тіле (3.1), які використовують лише значення похідних функції f в точці z_0 . Ці рекурентні формули не передбачають ні обчислення значень визначників Ганкеля, ні визначення обернених похідних Тіле. Обґрунтуємо аналогічні рекурентні формули для коефіцієнтів Т-КЛД.

4. ЗНАЧЕННЯ ПОХІДНИХ КАНОНІЧНИХ ЧИСЕЛЬНИКА ТА ЗНАМЕННИКА В ТОЧЦІ z_0 . ФОРМУЛА ГЕРРША.

Сформулюємо допоміжні результати на які буде спиратися доведення основного твердження.

З коефіцієнтів ланцюгового дробу (3.1) $b_i, i = \overline{0, n}$, сформуємо p -кратні суми вигляду

$$E_p^{l,n} = \sum_{i_1=l}^{n+1-2p} \frac{1}{b_{i_1}b_{i_1+1}} \sum_{i_2=i_1+2}^{n+3-2p} \frac{1}{b_{i_2}b_{i_2+1}} \cdots \sum_{i_p=i_{p-1}+2}^{n-1} \frac{1}{b_{i_p}b_{i_p+1}},$$

де $1 \leq p \leq [(n+1-l)/2]$, $l \geq 0$. Припускаємо також, що $E_0^{l,n} = 1$ і $E_p^{l,n} = 0$, коли $l > n+1-2p$.

Легко бачити, що $E_p^{l,n}$ задовольняють рекурентне співвідношення

$$E_p^{l,n} = \sum_{i=l}^{n+1-2p} \frac{1}{b_i b_{i+1}} E_{p-1}^{i+2,n},$$

та мають місце формули

$$E_p^{l,n} = \sum_{i=l}^s \frac{1}{b_i b_{i+1}} E_{p-1}^{i+2,n} + E_p^{s+1,n}, \quad s \geq l, \quad (4.1)$$

$$E_p^{l,n} - E_p^{l+k,n} = \sum_{i=l}^{l+k-1} \frac{1}{b_i b_{i+1}} E_{p-1}^{i+2,n}. \quad (4.2)$$

Якщо використати формули (2.3), то отримаємо, що канонічні чисельник $P_n(z)$ та знаменник $Q_n(z)$ ланцюгового дробу (3.1) є многочленами. Ці многочлени, згідно із формулою Ойлера-Міндінга [11, 15], запишуться у вигляді

$$P_n(z) = B_n^1 \sum_{i=1}^{r_1} E_i^{1,n} (z - z_0)^i, \quad r_1 = [n/2], \quad (4.3)$$

$$Q_n(z) = B_n^0 \sum_{i=0}^{r_2} E_i^{0,n} (z - z_0)^i, \quad r_2 = [(n+1)/2], \quad (4.4)$$

де $B_p^l = \prod_{i=l}^p b_i$.

Із (4.3) та (4.4) безпосередньо випливає, що:

$$\frac{(P_n)^{(m)}}{m!} = \frac{(P_n(z_0))^{(m)}}{m!} = \begin{cases} B_n^1 E_m^{1,n}, & \text{якщо } m \leq \left[\frac{n}{2}\right], \\ 0, & \text{якщо } m > \left[\frac{n}{2}\right], \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\frac{(Q_n)^{(m)}}{m!} = \frac{(Q_n(z_0))^{(m)}}{m!} = \begin{cases} B_n^0 E_m^{0,n}, & \text{якщо } m \leq \left[\frac{n+1}{2}\right], \\ 0, & \text{якщо } m > \left[\frac{n+1}{2}\right]. \end{cases} \quad (4.6)$$

Герріш [4] отримав формулу, яка є аналогом формули Лейбніца відшукання похідної m -го порядку частки двох функцій. Нехай в області $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$ дві функції u та v диференційовні до m -го порядку включно і

$v(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{Z}$. Має місце формула Герріша

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{(m)} = \frac{m!}{v^{m+1}} \begin{vmatrix} v & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & u \\ \frac{v'}{1!} & v & 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{u'}{1!} \\ \frac{v''}{2!} & v' & v & \cdots & 0 & 0 & \frac{u''}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{v^{(m)}}{m!} & \frac{v^{(m-1)}}{(m-1)!} & \frac{v^{(m-2)}}{(m-2)!} & \cdots & \frac{v''}{2!} & v' & \frac{u^{(m)}}{m!} \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

5. ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТУ РОБОТИ

Нехай функція f задана на компактї $\mathcal{Z} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathcal{Z}$. Визначимо коефіцієнти Т-КЛД

$$D_n(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \left(b_0 + \bigvee_{k=1}^n \frac{z - z_0}{b_k}\right)^{-1}, \quad b_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad k = \overline{0, n}, \quad (5.1)$$

щоб у точці z_0 виконувалися умови

$$D_n^{(m)}(z_0) = w_m, \quad w_m = f^{(m)}(z_0), \quad m = \overline{0, n}. \quad (5.2)$$

Якщо умови (5.2) задовольняються, то побудований ланцюговий дріб буде відповідним формальному степеневому ряду (3.3).

Доведення теореми 1.1. Згідно умови (5.2) визначимо коефіцієнти b_m , $m = \overline{0, n}$, Т-КЛД (5.1). Нехай $m = 0$. Тоді з (4.3) та (4.4) випливає, що

$$w_0 = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{B_n^1}{b_0 B_n^1}.$$

Звідки

$$b_0 = \frac{1}{w_0}.$$

Коли $m = 1$, то із (4.2), (4.5), (4.6) та (4.7) маємо, що:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{Q_n^2} \begin{vmatrix} Q_n & P_n \\ Q_n' & P_n' \end{vmatrix} = \frac{1}{(B_n^0)^2} \begin{vmatrix} B_n^0 & B_n^1 \\ B_n^0 E_1^{0,n} & B_n^1 E_1^{1,n} \end{vmatrix} \\ &= \frac{B_n^0 B_n^1}{(B_n^0)^2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ E_1^{0,n} & E_1^{1,n} \end{vmatrix} = \frac{1}{b_0} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ E_1^{1,n} & \frac{-1}{b_0 b_1} \end{vmatrix} \\ &= \frac{-1}{b_0^2 b_1}. \end{aligned}$$

Звідки

$$b_1 = \frac{-1}{b_0^2 w_1}.$$

Коли $m = 2$, то аналогічно отримуємо

$$\begin{aligned}
 w_2 &= \frac{2!}{(Q_n)^3} \begin{vmatrix} Q_n & 0 & P_n \\ Q'_n & Q_n & P'_n \\ \frac{Q''_n}{2} & Q'_n & \frac{P''_n}{2} \end{vmatrix} = \frac{2!}{(B_n^0)^3} \begin{vmatrix} B_n^0 & 0 & B_n^1 \\ B_n^0 E_1^{0,n} & B_n^0 & B_n^1 E_1^{1,n} \\ B_n^0 E_2^{0,n} & B_n^0 E_1^{0,n} & B_n^1 E_2^{1,n} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{2!(B_n^0)^2 B_n^1}{(B_n^0)^3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ E_1^{0,n} & 1 & E_1^{1,n} \\ E_2^{0,n} & E_1^{0,n} & E_2^{1,n} \end{vmatrix} = \frac{2!}{b_0} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E_1^{0,n} & 1 & \frac{-1}{b_0 b_1} E_0^{2,n} \\ E_2^{0,n} & E_1^{0,n} & \frac{-1}{b_0 b_1} E_1^{2,n} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{-2!}{b_0^2 b_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ E_1^{0,n} & E_1^{2,n} \end{vmatrix} = \frac{-2!}{b_0^2 b_1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ E_1^{0,n} & \frac{-1}{b_0 b_1} + \frac{-1}{b_1 b_2} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{2!}{b_0^2 b_1} \left(\frac{1}{b_0 b_1} + \frac{1}{b_1 b_2} \right).
 \end{aligned}$$

Тоді

$$b_2 = \frac{1}{b_0^2 b_1^2 \frac{w_2}{2!} - \frac{1}{b_0}}.$$

Формули (1.2) доведені.

В загальному випадку, коли $3 \leq m \leq n$, розглянемо дві можливості:

$$\text{а) } 3 \leq m \leq [n/2], \quad \text{б) } [n/2] < m \leq n.$$

Доведемо, що в обох випадках має місце співвідношення

$$\frac{w_m}{m!} = \frac{(-1)^m}{b_0^2 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \sum_{i_3=0}^{i_2+1} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \cdots \sum_{i_m=0}^{i_{m-1}+1} \frac{1}{b_{i_m} b_{i_m+1}}. \quad (5.3)$$

а) Нехай $3 < m \leq [n/2]$. Згідно із (4.5), (4.6) та (4.7) маємо:

$$w_m = \frac{m!}{(Q_n^{(m)})_{m+1}} = \begin{vmatrix} Q_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & P_n \\ \frac{Q'_n}{1!} & Q_n & 0 & \cdots & 0 & \frac{P'_n}{1!} \\ \frac{Q''_n}{2!} & \frac{Q'_n}{1!} & Q_n & \cdots & 0 & \frac{P''_n}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{Q_n^{(m-1)}}{(m-1)!} & \frac{Q_n^{(m-2)}}{(m-2)!} & \frac{Q_n^{(m-3)}}{(m-3)!} & \cdots & Q_n & \frac{P_n^{(m-1)}}{(m-1)!} \\ \frac{Q_n^{(m)}}{m!} & \frac{Q_n^{(m-1)}}{(m-1)!} & \frac{Q_n^{(m-2)}}{(m-2)!} & \cdots & \frac{Q'_n}{1!} & \frac{P_n^{(m)}}{m!} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{m!}{(B_n^0)^{m+1}} \begin{vmatrix} B_n^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_n^1 \\ B_n^0 E_1^{0,n} & B_n^0 & 0 & \cdots & 0 & B_n^1 E_1^{1,n} \\ B_n^0 E_2^{0,n} & B_n^0 E_1^{0,n} & B_n^0 & \cdots & 0 & B_n^1 E_2^{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_n^0 E_{m-1}^{0,n} & B_n^0 E_{m-2}^{0,n} & B_n^0 E_{m-3}^{0,n} & \cdots & B_n^0 & B_n^1 E_{m-1}^{1,n} \\ B_n^0 E_m^{0,n} & B_n^0 E_{m-1}^{0,n} & B_n^0 E_{m-2}^{0,n} & \cdots & B_n^0 E_1^{0,n} & B_n^1 E_m^{1,n} \end{vmatrix}.$$

Винесемо спільний множник B_n^0 із перших m стовпців і множник B_n^1 із $(m+1)$ -го стовпчика визначника. Тоді

$$\frac{w_m}{m!} = \frac{B_n^1 (B_n^0)^m}{(B_n^0)^{m+1}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ E_1^{0,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & E_1^{1,n} \\ E_2^{0,n} & E_1^{0,n} & 1 & \cdots & 0 & E_2^{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ E_{m-1}^{0,n} & E_{m-2}^{0,n} & E_{m-3}^{0,n} & \cdots & 1 & E_{m-1}^{1,n} \\ E_m^{0,n} & E_{m-1}^{0,n} & E_{m-2}^{0,n} & \cdots & E_1^{0,n} & E_m^{1,n} \end{vmatrix} = \frac{1}{b_0} K_{m+1}. \quad (5.4)$$

Визначник K_{m+1} зведемо до трикутного вигляду. Перетворення будуть виконуватися лише над елементами останнього стовпчика.

Аналогічно [13], через κ_i позначимо i -й стовпчик.

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= [1, E_1^{0,n}, \dots, E_m^{0,n}]^T, \\ \kappa_i &= [\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, E_1^{0,n}, \dots, E_{m+1-i}^{0,n}]^T, \quad i = \overline{2, m}, \\ \kappa_{m+1} &= [1, E_1^{1,n}, E_2^{1,n}, \dots, E_m^{1,n}]^T. \end{aligned}$$

Визначник K_{m+1} коротко будемо записувати:

$$K_{m+1} = |\kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_{m+1}|.$$

Від елементів $(m+1)$ -го стовпчика визначника K_{m+1} віднімемо елементи 1-го стовпчика, скористаємося співвідношенням (4.2) та винесемо спільний множник $-1/(b_0 b_1)$ із усіх елементів стовпчика. Тоді отримаємо, що

$$\kappa_{m+1} = \frac{-1}{b_0 b_1} [0, 1, E_1^{2,n}, E_2^{2,n}, \dots, E_{m-1}^{2,n}]^T.$$

Введемо такі позначення:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{l,m}^k &= \left[\underbrace{0, \dots, 0}_l, 1, E_1^{k,n}, \dots, E_{m-l}^{k,n} \right]^T, \quad l = \overline{1, m-1}, \\ \mathcal{I}_{m,m}^k &= \left[\underbrace{0, \dots, 0}_m, 1 \right]^T, \quad k \geq 2.\end{aligned}\tag{5.5}$$

Тоді з урахуванням позначення (5.5) останній стовпчик запишеться так:

$$\kappa_{m+1} = \frac{-1}{b_0 b_1} \mathcal{I}_{1,m}^2.\tag{5.6}$$

Від елементів стовпчика $\mathcal{I}_{l,m}^k$ віднімаємо елементи стовпчика κ_{l+1} і скористаємося (4.4). В результаті отримаємо таке рекурентне співвідношення:

$$\mathcal{I}_{l,m}^k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{-1}{b_i b_{i+1}} \mathcal{I}_{l+1,m}^{i+2}.\tag{5.7}$$

Із (5.6) та (5.7) випливає:

$$\begin{aligned}\kappa_{m+1} &= \frac{-1}{b_0 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{-1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \mathcal{I}_{1,m}^{i_2+2} = \frac{-1}{b_0 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{-1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \sum_{i_2=0}^{i_1+1} \frac{-1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \mathcal{I}_{2,m}^{i_2+2} \\ &= \dots = \frac{(-1)^m}{b_0 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \sum_{i_3=0}^{i_2+1} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \dots \sum_{i_m=0}^{i_{m-1}+1} \frac{1}{b_{i_m} b_{i_m+1}} \mathcal{I}_{m,m}^{i_m+2}.\end{aligned}$$

Таким чином, визначник K_{m+1} зведено до трикутного вигляду, а отже (5.4) переписеться так:

$$\frac{w_m}{m!} = \frac{(-1)^m}{b_0^2 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \sum_{i_3=0}^{i_2+1} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \dots \sum_{i_m=1}^{i_{m-1}+1} \frac{1}{b_{i_m} b_{i_m+1}}.$$

Отже, коли $3 \leq m \leq [n/2]$, то співвідношення (5.3) виконується.

б) Нехай $[(n+1)/2] \leq m \leq n$. Тоді маємо два додаткові випадки: $n = 2t - 1$ і $n = 2t$.

б-1) Коли $n = 2t - 1$, то $m = \overline{t, 2t-1}$. Нехай $m = t$. Тоді, згідно з (4.6) та (4.7),

$$(Q_n(z_0))^{(t)} = t! B_n^0 E_t^{0,n}, \quad (P_n(z_0))^{(t)} = 0.$$

Підставимо значення похідних чисельника та знаменника в (4.7). Отримуємо

$$w_t = \frac{t!}{(B_n^0)^{t+1}} \begin{vmatrix} B_n^0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B_n^1 \\ B_n^0 E_1^{0,n} & B_n^0 & 0 & \cdots & 0 & B_n^1 E_1^{1,n} \\ B_n^0 E_2^{0,n} & B_n^0 E_1^{0,n} & B_n^0 & \cdots & 0 & B_n^1 E_2^{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_n^0 E_{t-1}^{0,n} & B_n^0 E_{t-2}^{0,n} & B_n^0 E_{t-3}^{0,n} & \cdots & B_n^0 & B_n^1 E_{t-1}^{1,n} \\ B_n^0 E_t^{0,n} & B_n^0 E_{t-1}^{0,n} & B_n^0 E_{t-2}^{0,n} & \cdots & B_n^0 E_1^{0,n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Після винесення спільних множників B_n^0 із перших t стовпців і B_n^1 із останнього стовпчика маємо:

$$\frac{w_t}{t!} = \frac{1}{b_0} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ E_1^{0,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & E_1^{1,n} \\ E_2^{0,n} & E_1^{0,n} & 1 & \cdots & 0 & E_2^{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ E_{t-1}^{0,n} & E_{t-2}^{0,n} & E_{t-3}^{0,n} & \cdots & 1 & E_{t-1}^{1,n} \\ E_t^{0,n} & E_{t-1}^{0,n} & E_{t-2}^{0,n} & \cdots & E_1^{0,n} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{b_0} L_{t+1}. \quad (5.8)$$

Визначник L_{t+1} запишемо так:

$$L_{t+1} = |\kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_t \lambda_{t+1}|, \quad \text{де} \quad \lambda_{t+1} = [1, E_1^{1,n}, E_1^{1,n}, \dots, E_{t-1}^{1,n}, 0]^T.$$

Від елементів стовпчика λ_{t+1} віднімемо елементи стовпчика κ_1 , скористаємося (4.2). Згідно (4.1) для $s = 0$ маємо, що

$$-E_t^{0,n} = \frac{-1}{b_0 b_1} E_t^{2,n} - E_t^{1,n}.$$

Врахуємо, що $E_t^{1,n} = E_t^{1,2t-1} = 0$. Виносячи з елементів стовпчика спільний множник $-1/(b_0 b_1)$ отримаємо, що

$$\lambda_{t+1} = \frac{-1}{b_0 b_1} [0, 1, E_1^{2,n}, E_1^{2,n}, \dots, E_{t-1}^{2,n}]^T = \frac{-1}{b_0 b_1} \mathcal{I}_{1,t}^2,$$

де $\mathcal{I}_{1,t}^2$ визначено в (5.5). В силу (5.7) стовпчик λ_{t+1} набуває вигляду

$$\lambda_{t+1} = \frac{(-1)^t}{b_0 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \sum_{i_3=0}^{i_2+1} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \cdots \sum_{i_t=0}^{i_{t-1}+1} \frac{1}{b_{i_t} b_{i_t+1}} \mathcal{I}_{t,t}^{i_t+2}.$$

Таким чином, визначник L_{t+1} зведено до трикутного вигляду. Тоді з (5.8) випливає

$$\frac{w_t}{t!} = \frac{(-1)^t}{b_0^2 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \sum_{i_3=0}^{i_2+1} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \cdots \sum_{i_t=0}^{i_{t-1}+1} \frac{1}{b_{i_t} b_{i_t+1}}.$$

І в цьому випадку (5.3) також виконується.

Коли $m = t + l$, $l = \overline{1, t-1}$, то співвідношення (4.7) запишеться у вигляді

$$w_{t+l} = \frac{(t+l)!}{(B_n^0)^{t+l+1}} \begin{vmatrix} B_n^0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & B_n^1 \\ B_n^0 E_1^{0,n} & B_n^0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & B_n^1 E_1^{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_n^0 E_t^{0,n} & B_n^0 E_{t-1}^{0,n} & \cdots & B_n^0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B_n^0 E_t^{0,n} & \cdots & B_n^0 E_1^{0,n} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n^0 E_{t-2}^{0,n} & \cdots & B_n^0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_n^0 E_{t-1}^{0,n} & \cdots & B_n^0 E_1^{0,n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Спільний множник B_n^0 виносимо із перших $(t+l)$ стовпців визначника, а спільний множник B_n^1 виносимо із останнього стовпчика. Маємо

$$\frac{w_{t+l}}{(t+l)!} = \frac{1}{b_0} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ E_1^{0,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & E_1^{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ E_{t-1}^{0,n} & E_{t-2}^{0,n} & E_{t-3}^{0,n} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & E_{t-1}^{1,n} \\ E_t^{0,n} & E_{t-1}^{0,n} & E_{t-2}^{0,n} & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E_t^{0,n} & E_{t-1}^{0,n} & \cdots & E_1^{0,n} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E_{t-2}^{0,n} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E_{t-1}^{0,n} & \cdots & E_1^{0,n} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{b_0} M_{t+l+1}. \quad (5.9)$$

Позначимо стовпці визначника M_{t+l+1} наступним чином

$$\mu_1 = [1, E_1^{0,n}, \dots, E_{t-1}^{0,n}, E_t^{0,n}, \underbrace{0, \dots, 0}_l]^T,$$

$$\begin{aligned}\mu_i &= [\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, E_1^{0,n}, \dots, E_t^{0,n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{l-i}]^T, & i = \overline{2, l}, \\ \mu_i &= [\underbrace{0, \dots, 0}_{i-1}, 1, E_1^{0,n}, \dots, E_{t+l+1-i}^{0,n}]^T, & i = \overline{l+1, t+l}, \\ \mu_{t+l+1} &= [1, E_1^{1,n}, \dots, E_{t-1}^{1,n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{l+1}]^T.\end{aligned}$$

Визначник M_{t+l+1} коротко запишеться так:

$$M_{t+l+1} = |\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{t+l+1}|.$$

Від елементів останнього стовпчика μ_{t+l+1} віднімаємо елементи перший стовпчик μ_1 , скористаємося (4.1) для $s = 0$ та (4.2), винесемо спільний множник $-1/(b_0 b_1)$. Маємо

$$\mu_{t+l+1} = \frac{-1}{b_0 b_1} \mathcal{M}_1^2, \quad \text{де } \mathcal{M}_1^2 = [0, 1, E_1^{2,n}, \dots, E_{t-1}^{2,n}, \underbrace{0, \dots, 0}_l]^T. \quad (5.10)$$

Розглянемо стовпчик вигляду

$$\mathcal{M}_k^m = [\underbrace{0, \dots, 0}_k, 1, E_1^{m,n}, \dots, E_{t-1}^{m,n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{l+1-k}]^T, \quad k = \overline{1, l}, \quad m \geq 2.$$

Від стовпчика $\mathcal{M}_k^m$ віднімаємо стовпчик μ_{k+1} та скористаємося (4.1) та (4.2) для $s = m - 1$. Отримуємо

$$\mathcal{M}_k^m = \sum_{i_{k+1}=0}^{m-1} \frac{-1}{b_{i_{k+1}} b_{i_{k+1}+1}} \mathcal{M}_{k+1}^{i_{k+1}+2}. \quad (5.11)$$

Оскільки $\mathcal{M}_{l+1}^m = \mathcal{I}_{l+1, t+l}^m$, то

$$\mathcal{M}_l^m = \sum_{i_{l+1}=0}^{m-1} \frac{-1}{b_{i_{l+1}} b_{i_{l+1}+1}} \mathcal{I}_{l+1, t+l}^{i_{l+1}+2}. \quad (5.12)$$

Із (5.7) випливає, що

$$\mathcal{I}_{l+1, t+l}^{i_{l+1}+2} = \sum_{i_{l+2}=0}^{i_{l+1}+1} \frac{-1}{b_{i_{l+2}} b_{i_{l+2}+1}} \dots \sum_{i_{t+l}=0}^{i_{t+l-1}+1} \frac{-1}{b_{i_{t+l}} b_{i_{t+l}+1}} [\underbrace{0, \dots, 0}_{t+l}, 1]^T. \quad (5.13)$$

Підставляючи (5.13) в (5.12), далі в (5.11) для $k = l, l-1, \dots, 1$ і насамкінець в (5.10) в результаті отримаємо

$$\mu_{t+l+1} = \frac{(-1)^{t+l}}{b_0 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \sum_{i_3=0}^{i_2+1} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \dots \sum_{i_{l+1}=0}^{i_l+1} \frac{1}{b_{i_{l+1}} b_{i_{l+1}+1}} \times$$

$$\times \sum_{i_{l+2}=0}^{i_{l+1}+1} \frac{1}{b_{i_{l+2}} b_{i_{l+2}+1}} \cdots \sum_{i_{t+l}=0}^{i_{t+l-1}+1} \frac{1}{b_{i_{t+l}} b_{i_{t+l}+1}} [\underbrace{0, \dots, 0}_{t+l}, 1]^T.$$

Визначник M_{t+l+1} зведено до трикутного вигляду, а тоді з (5.9) отримуємо

$$\frac{w_{t+l}}{(t+l)!} = \frac{(-1)^{t+l}}{b_0^2 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \sum_{i_3=0}^{i_2+1} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \cdots \sum_{i_{t+l}=0}^{i_{t+l-1}+1} \frac{1}{b_{i_{t+l}} b_{i_{t+l}+1}}.$$

Таким чином, показано, що (5.3) виконується для $m = t+l$, $l = \overline{1, t-1}$.

b-2) Коли $n = 2t$, то $m = \overline{t, 2t}$. Якщо $m = t$, то із (4.5) та (4.6) маємо, що

$$(P_n(z_0))^{(t)} = t! B_n^1 E_t^{1,n}, \quad (Q_n(z_0))^{(t)} = t! B_n^0 E_t^{0,n}.$$

Тоді співвідношення (4.7) запишеться у вигляді

$$w_t = \frac{t!}{(B_n^0)^{t+1}} \begin{vmatrix} B_n^0 & 0 & \cdots & 0 & B_n^1 \\ B_n^0 E_1^{0,n} & B_n^0 & \cdots & 0 & B_n^1 E_1^{1,n} \\ B_n^0 E_2^{0,n} & B_n^0 E_1^{0,n} & \cdots & 0 & B_n^1 E_2^{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_n^0 E_t^{0,n} & B_n^0 E_{t-1}^{0,n} & \cdots & B_n^0 & B_n^1 E_t^{1,n} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно, як в попередніх випадках, винесемо спільні множники B_n^0 із перших t -го стовпця і B_n^1 із останнього стовпчика. Тоді отримуємо (5.4), а отже співвідношення (5.3) виконується.

Нехай $m = t+l$, $l = \overline{1, t}$. Тоді співвідношення (4.7) запишеться у вигляді

$$w_{t+l} = \frac{(t+l)!}{(B_n^0)^{t+l+1}} \begin{vmatrix} B_n^0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & B_n^1 \\ B_n^0 E_1^{0,n} & B_n^0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & B_n^1 E_1^{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ B_n^0 E_t^{0,n} & B_n^0 E_{t-1}^{0,n} & \cdots & B_n^0 E_1^{0,n} & \cdots & 0 & B_n^1 E_t^{1,n} \\ 0 & B_n^0 E_t^{0,n} & \cdots & B_n^0 E_2^{0,n} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_n^0 E_{t-1}^{0,n} & \cdots & B_n^0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & B_n^0 E_t^{0,n} & \cdots & B_n^0 E_1^{0,n} & 0 \end{vmatrix}.$$

Як і у попередніх випадках, винесемо спільний множник B_n^0 з перших $(t+l)$ стовпців і спільний множник B_n^1 з останнього стовпчика. Маємо

$$\frac{w_{t+l}}{(t+l)!} = \frac{1}{b_0} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ E_1^{0,n} & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & E_1^{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ E_t^{0,n} & E_{t-1}^{0,n} & \cdots & E_1^{0,n} & \cdots & 0 & E_t^{1,n} \\ 0 & E_t^{0,n} & \cdots & E_2^{0,n} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_{t-1}^{0,n} & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & E_t^{0,n} & \cdots & E_1^{0,n} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{b_0} N_{t+l+1}. \quad (5.14)$$

Визначник N_{t+l+1} коротко запишеться:

$$N_{t+l+1} = |\mu_1 \cdots \mu_{t+l} \nu_{t+l+1}|, \quad \text{де} \quad \nu_{t+l+1} = [1, E_1^{1,n}, \dots, E_t^{1,n}, \underbrace{0, \dots, 0}_l]^T.$$

Зведемо визначник N_{t+l+1} до трикутного вигляду. Для цього від елементів останнього стовпчика ν_{t+l+1} відніmemo елементи першого стовпчика μ_1 і скористаємося (4.2). Тоді

$$\nu_{t+l+1} = \frac{-1}{b_0 b_1} \mathcal{M}_1^2,$$

Тепер з (5.11), (5.12) та (5.13) випливає, що

$$\begin{aligned} \nu_{t+l+1} &= \frac{(-1)^{t+l}}{b_0 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \sum_{i_3=0}^{i_2+1} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \cdots \sum_{i_{l+1}=0}^{i_l+1} \frac{1}{b_{i_{l+1}} b_{i_{l+1}+1}} \times \\ &\times \sum_{i_{l+2}=0}^{i_{l+1}+1} \frac{1}{b_{i_{l+2}} b_{i_{l+2}+1}} \cdots \sum_{i_{t+l}=0}^{i_{t+l-1}+1} \frac{1}{b_{i_{t+l}} b_{i_{t+l}+1}} \underbrace{[0, \dots, 0, 1]_{t+l}}^T. \end{aligned}$$

Визначник N_{t+l+1} зведено до трикутного вигляду. Тоді із (5.14) випливає, що

$$\frac{w_{t+l}}{(t+l)!} = \frac{(-1)^{t+l}}{b_0^2 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \sum_{i_3=0}^{i_2+1} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \cdots \sum_{i_{t+l}=0}^{i_{t+l-1}+1} \frac{1}{b_{i_{t+l}} b_{i_{t+l}+1}}.$$

Співвідношення (5.3) виконується і в цьому випадку.

Обґрунтуємо рекурентну формулу (1.3). Припустимо, що коефіцієнти $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$ визначені на попередніх кроках. Для $k \leq n$ співвідношення (5.3) набуває вигляду

$$\frac{w_k}{k!} = \frac{(-1)^k}{b_0^2 b_1} \sum_{i_2=0}^1 \frac{1}{b_{i_2} b_{i_2+1}} \sum_{i_3=0}^{i_2+1} \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}}.$$

Виокремимо доданок, що містить невідомий коефіцієнт b_k . Маємо

$$\begin{aligned} \frac{w_k}{k!} &= \frac{(-1)^k}{b_0^2 b_1} \left(\frac{1}{b_0 b_1} \sum_{i_3=0}^1 \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=0}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_1 b_2} \sum_{i_3=0}^2 \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=0}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} \right) = \\ &= \frac{(-1)^k}{b_0^2 b_1} \left(\frac{1}{b_0 b_1} \sum_{i_3=0}^1 \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=0}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_1 b_2} \sum_{i_3=0}^1 \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=0}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_1 b_2^2 b_3} \sum_{i_4=0}^3 \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \sum_{i_5=0}^{i_4+1} \frac{1}{b_{i_5} b_{i_5+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} \right) = \cdots = \\ &= (-1)^k \left(\frac{1}{b_0^3 b_1^2} \sum_{i_3=0}^1 \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=0}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_0^2 b_1^2 b_2} \sum_{i_3=0}^1 \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=0}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{b_0^2 b_1^2 b_2^2 b_3} \sum_{i_4=0}^3 \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \sum_{i_5=0}^{i_4+1} \frac{1}{b_{i_5} b_{i_5+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} + \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{1}{b_{k-1} \prod_{j=0}^{k-2} b_j^2} \sum_{i_k=0}^{k-1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} + \frac{1}{b_k \prod_{j=0}^{k-1} b_j^2} \right). \end{aligned}$$

Звідки отримуємо:

$$b_k = 1 / \prod_{j=0}^{k-1} b_j^2 \left(\frac{(-1)^k w_k}{k!} - \left(\frac{1}{b_0^3 b_1^2} \sum_{i_3=0}^1 \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{b_0^2 b_1^2 b_2} \sum_{i_3=0}^1 \frac{1}{b_{i_3} b_{i_3+1}} \sum_{i_4=0}^{i_3+1} \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} + \\
& + \frac{1}{b_0^2 b_1^2 b_2^2 b_3} \sum_{i_4=0}^3 \frac{1}{b_{i_4} b_{i_4+1}} \sum_{i_5=0}^{i_4+1} \frac{1}{b_{i_5} b_{i_5+1}} \cdots \sum_{i_k=0}^{i_{k-1}+1} \frac{1}{b_{i_k} b_{i_k+1}} + \\
& + \cdots + \frac{1}{b_{k-1} \prod_{j=0}^{k-2} b_j^2} \sum_{i_k=0}^{k-1} \frac{1}{b_k b_{k+1}} \Big) \Big).
\end{aligned}$$

Формула (1.3) вірна і для $m = k \leq n$.

□

6. Висновки

Вкажемо на деякі переваги отриманих результатів.

- (1) Формули визначення коефіцієнтів Т-КЛД, що відповідний степеневому ряду, не передбачають обчислення обернених похідних 2-го типу або визначників Ганкеля.
- (2) Функцію можна розвинути в степеневий ряд. На відміну від ланцюгового дробу степеневий ряд може повільніше збігатися до функції, тобто вимагати знаходження більшої кількості членів ряду, або мати меншу область збіжності.
- (3) Розвинення функції в ланцюговий дріб Тіле, Т-КЛД чи дріб іншого вигляду як правило має більш широкую область збіжності, а тому розвинення в ланцюгові дроби виступають аналітичним продовженням розвинення функції в степеневий ряд.
- (4) Алгоритми обчислення значення ланцюгових дробів більш стійкі до обчислювальних похибок заокруглення.

Виходячи з цього відзначимо, що відшукання нових та дослідження відомих методів розвинення функції в ланцюгові дроби різних виглядів залишається актуальною задачею як в теоретичному, так і в практичному аспекті.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] George A. Baker, Jr. and P. Graves-Morris. *Padé approximants. Part I*, volume 13 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1981. Basic theory, With a foreword by Peter A. Carruthers. doi:10.1017/CB09780511530074.
- [2] A. Cuyt, V. B. Petersen, B. Verdonk, H. Waadeland, and W. B. Jones. *Handbook of continued fractions for special functions*. Springer, New York, 2008. doi:10.1007/978-1-4020-6949-9.

- [3] V. K. Dzyadyk and I. A. Shevchuk. *Theory of uniform approximation of functions by polynomials*. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008. doi:10.1515/9783110208245.
- [4] F. Gerrish. 64.2 A useless formula? *The Mathematical Gazette*, 64(427):52–52, 1980. doi:10.2307/3615888.
- [5] P. Henrici. *Applied and computational complex analysis. Volume 1: Power series, integration, conformal mapping, location of zeros*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience, New York-London-Sydney, 1974.
- [6] W. B. Jones and W. J. Thron. *Continued fractions. Analytic theory and applications*, volume 11 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA, 1980. doi:10.1017/CB09780511759550.
- [7] A. N. Khovanskii. *The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory*. Groningen: P. Noordhoff, 1963. Translated by Peter Wynn.
- [8] V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, and L. A. Yanovich. *Methods of operator interpolation*, volume 83. Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2010.
- [9] Yu. Myslo and M. Pahiryia. A certain method of construction of Thiele-Hermite continued fraction at a point. *Proc. Int. Geom. Cent.*, 16(3-4):244–261, 2023. doi:10.15673/pigc.v16i3.2646.
- [10] N. E. Nörlund. *Vorlesungen über Differenzenrechnung*. Berlin: Springer, 1924. doi:10.1007/978-3-642-50824-0.
- [11] O. Perron. *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Dritte, verbesserte und erweiterte Aufl. Bd. II. Analytisch-funktionentheoretische Kettenbrüche*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1957.
- [12] T. N. Thiele. *Interpolationsrechnung*. Nineteenth Century Collections Online: Science, Technology, and Medicine, Part I. B. G. Teubner, Leipzig, 1909.
- [13] R. Vein and P. Dale. *Determinants and their applications in mathematical physics*, volume 134 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2006. doi:10.1007/b98968.
- [14] J. L. Walsh. *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, volume Vol. XX of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, third edition, 1960. doi:10.1007/BF01708049.
- [15] М. М. Пагіря. *Наближення функцій ланцюговими дробами*. Ужгород: Гражда, 2016.

Надійшла до редакції 15 серпня 2024, прийнята до друку 20 вересня 2024.

Юлія Мисло

УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ, вулиця Волошина, 54, УЖГОРОД, ЗАКАРПАТСЬКА ОЛАСТЬ, 88000, УКРАЇНА

Email: julia.pah@gmail.com

ORCID: 0000-0001-6771-2844