Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 16, no. 2 (2023) pp. 105–115

Одноточкові розриви нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутку компактних просторів

Микола Козловський

Abstract. We investigate necessary and sufficient conditions for the existence of a (strongly) separately continuous function of n compact variables with an one-point set of points of discontinuity.

Анотація. Даються необхідні та достатні умови існування нарізно неперервної функції на добутку n компактних просторів із одноточковою множиною точок розриву.

1. Вступ

Дослідження множини точок розриву нарізно неперервної функції (тобто функції двох і більше змінних, які неперервні відносно кожної змінної) були розпочаті Р. Бером у його класичній дисертації [1] і були продовжені у роботах багатьох математиків (див. [2] і вказану там літературу). У зв'язку з відомою теоремою Наміоки [3] природно виникає питання про характеризацію множини точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку компактних просторів, яке досить давно було сформульовано З. Пьотровським [4] і ще не дістало своєї повної відповіді на сьогоднішній день.

Слід зауважити, що така характеризація множини точок розриву одержана лише у наступних двох випадках: для нарізно неперервних функцій на добутку n метризовних просторів [7], і для нарізно неперервних функцій на добутку n просторів, кожен з яких є добутком сепарабельних метризовних просторів [8].

Одноточкові розриви нарізно неперервних функцій на добутку компактних просторів вивчались у роботах [9] і [10], де було встановлено, що важливу роль тут відіграють збіжні послідовності відкритих множин. У роботі [10] одержано остаточний результат для функцій двох змінних і показано, що множина $\{(x_0, y_0)\}$ є множиною точок розриву

Ключові слова: нарізно неперервні функції, одноточкові розриви
DOI: http://dx.doi.org/10.15673/pigc.v16i2.2451

деякої нарізно неперервної функції f на добутку компактних просторів X і Y тоді і тільки тоді, коли в просторах X і Y існують послідовності функціонально відкритих множин, які збігаються до неізольованих точок x_0 і y_0 відповідно.

У даній роботі ми узагальнюємо результат із [10] на випадок нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутку компактних просторів. При цьому було виявлено, що для трьох і більше змінних одержаний опис має дещо ширшу інтерпретацію, пов'язану із поняттям неперервності функцій відносно груп змінних, яке було уведене В. Маслюченком в [6].

2. Нарізно неперервні відносно груп змінних функції

Нехай $n \geqslant 2$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – топологічні простори, $X = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$, $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ – власна підмножина і

$$T = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash S, \qquad Y = \prod_{s \in S} X_s, \qquad Z = \prod_{t \in T} X_T.$$

Для кожної точки $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ покладемо

$$x|_S = (x_s)_{s \in S}, \qquad x|_T = (x_T)_{t \in T}.$$

Зрозуміло, що $x|_S \in Y$ і $x|_T \in Z$, а відображення

$$\varphi_S : X \to Y \times Z, \qquad \varphi_S(x) = (x|_S, x|_T)\,,$$

є гомеоморфізмом.

Будемо казати, що функція $f : X \to \mathbb{R}$ є *S-неперервною* у точці $x_0 \in X$, якщо відповідне їй відображення

$$f_S : Y \times Z \to \mathbb{R}, \qquad f_S(y, z) = f(\varphi_S^{-1}(y, z)),$$

є неперервним відносно змінної y в точці $\varphi_S(x_0)$. Якщо f є S-неперервною у кожній точці $x \in X$, то казатимемо, що f є *S-неперервною*.

Тепер нехай $\mathcal{S}$ – система власних підмножин $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Будемо говорити, що функція $f : X \to \mathbb{R}$ є *нарізно неперервною відносно груп змінних з системи* $\mathcal{S}$ (нарізно $\mathcal{S}$-неперервною), якщо f є S-неперервною для кожного $S \in \mathcal{S}$.

Якщо $\mathcal{S}$ – це система всіх $(n-1)$-елементних підмножин множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, то будемо казати, що функція $f : X \to \mathbb{R}$ є *сильно* $(n-1)$-*неперервною*, якщо вона є $\mathcal{S}$-неперервною.

Зрозуміло, що кожна неперервна функція в точці є $\mathcal{S}$-неперервною в цій точці, крім того, оскільки для кожного $k \in \{1, 2, \ldots\}$ функція $f : X \to \mathbb{R}$ є $\{k\}$-неперервною тоді і тільки тоді, коли f є неперервною відносно k-тої змінної, то має місце наступний факт.

Твердження 2.1. *Нехай $n \geqslant 2$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ – топологічні простори. Функція*

$$f : \prod_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$$

є нарізно неперервною тоді і тільки тоді, коли f є нарізно неперервною відносно груп змінних системи одноточкових множин

$$\mathcal{S} = \{\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}\}\,.$$

Наступне досить просте твердження дає зв'язок між різними S-неперервностями.

Твердження 2.2. *Нехай $n \geqslant 2$, S і S' – власні підмножин множини $\{1, 2, \dots, n\}$ такі, що $S \subseteq S'$. Нехай також $X_1, X_2, \dots, X_n$ – топологічні простори і $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$ – S'-неперервна функція. Тоді f є S-неперервною.*

Доведення. Покладемо

$$T = \{1, 2, \dots, n\} \backslash S, \qquad Y = \prod_{s \in S} X_s, \qquad Z = \prod_{t \in T} X_T,$$
$$T' = \{1, 2, \dots, n\} \backslash S', \qquad Y' = \prod_{s \in S'} X_s, \qquad Z' = \prod_{t \in T'} X_T.$$

Зафіксуємо $x \in Z$ і розглянемо функцію $g : Y \to \mathbb{R}$

$$g(y) = f_S(y, z) = f\left(\varphi_S^{-1}(y, z)\right).$$

Зрозуміло, що $T' \subseteq T$. Тому $z' = z|_{T'} \in Z'$. Оскільки f є S'-неперервною, то функція $h : Y' \to \mathbb{R}$

$$h(y') = f_{S'}(y', z') = f\left(\varphi_{S'}^{-1}(y', z')\right),$$

є неперервною. Крім того, відображення

$$\psi : Y \to Y', \qquad \psi(y) = (y, z|_{S' \backslash S}),$$

є неперервним. Тоді

$$g(y) = h(\psi(y))$$

і функція g є неперервною, як композиція неперервних відображень, а, отже, f є S-неперервною. □

З щойно доведеного факту, негайно випливають наступні два твердження.

Твердження 2.3. *Нехай $n \geqslant 2$, $\mathcal{S}$ і $\mathcal{S}'$ – системи власних підмножин множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ такі, що для довільного елемента $S \in \mathcal{S}$ існує елемент $S' \in \mathcal{S}'$ такий, що $S \subseteq S'$. Нехай також $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – топологічні простори і $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$ – $\mathcal{S}'$-неперервна. Тоді f є $\mathcal{S}$-неперервною.*

Твердження 2.4. *Нехай $n \geqslant 2$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – топологічні простори і функція $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$ є сильно $(n-1)$-неперервною. Тоді функція f є $\mathcal{S}$-неперервною для довільної системи $\mathcal{S}$ власних підмножин множини $\{1, 2, \ldots, n\}$*

3. Нарізно неперервні функції на добутку компактів

Казатимемо, що послідовність $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ непорожніх підмножин A_n топологічного простору X *збігається* до точки $x_0 \in X$ (позначатимемо $A_n \to x_0$), якщо для довільного околу U точки x_0 в X існує номер n_0 такий, що $A_n \subseteq U$ для всіх $n \geqslant n_0$.

Наступне твердження дає можливість розглядати точку

$$\mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}) \in \prod_{k=1}^{n} X_k$$

таку, що для довільного $1 \leqslant k \leqslant n$ точка $x_{0,k}$ є неізольованою в X_k.

Твердження 3.1. *Нехай $n \geqslant 2$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – T_1 простори,*

$$\mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}) \in X = \prod_{k=1}^{n} X_k.$$

Тоді наступні умови рівносильні

(i) *існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{\mathrm{x}_0\}$;*

(ii) *множина $S = \{k \leqslant n \mid x_{0,k}$ неізольована в $X_k\}$ містить принаймні два елементи, а також існує нарізно неперервна функція*

$$g : \prod_{k \in S} X_k \to \mathbb{R}$$

така, що $D(g) = \{x_0|_S\}$.

Доведення. Якщо $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, то рівносильність умов (i) та (ii) є очевидною. Тому вважатимемо далі, що $T = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash S \neq \varnothing$.

(i)$\Rightarrow$(ii) Доведемо спочатку, що $|S| \geqslant 2$. Припустимо, що $|S| \leqslant 1$. Зауважимо, що тоді нарізно неперервна функція f є неперервною в точці x_0, що дає нам суперечність. Справді, якщо $S = \varnothing$, то точка x_0 є ізольованою в просторі X, і тому функція f є неперервною в точці x_0. Якщо ж $|S| = 1$, тобто $S = \{i\}$, тоді неперервність f в точці x_0 випливає із неперервності f відносно i-тої змінної.

Отже, $|S| \geqslant 2$. Розглянемо функцію $g : \prod\limits_{k\in S} X_k \to \mathbb{R}$

$$g\left((x_k)_{k\in S}\right) = f\left((x_k)_{k\in S}, \mathrm{x}_0|_T\right)$$

З нарізної неперервності функції f випливає нарізна неперервність функції g. Оскільки точка $\mathrm{x}_0|_T$ є ізольованою в просторі $\prod\limits_{k\in T} X_k$, то множина

$$G = \{\mathrm{x} \in X : \mathrm{x}|_T = \mathrm{x}_0|_T\}$$

є відкритою в X, причому $\mathrm{x}_0 \in G$.

Тепер із умови $D(f) = \{\mathrm{x}_0\}$ випливає, що $D(f|_G) = \{\mathrm{x}_0\}$. А це означає, що

$$D(g) = \{\mathrm{x}_0|_S\}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Розглянемо функцію $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} g(\mathrm{x}|_S), & \mathrm{x}|_T = \mathrm{x}_0|_T, \\ 0, & \mathrm{x}|_T \neq \mathrm{x}_0|_T. \end{cases}$$

Оскільки всі X_k є T_1 просторами, і точка $x_{0,k}$ при $k \in T$ є ізольованою, то множина

$$G = \{\mathrm{x} \in X : \mathrm{x}|_T = \mathrm{x}_0|_T\}$$

є відкрито-замкненою в X.

Тому, як і раніше, маємо, що

$$D(f) = \{\mathrm{x} \in G : \mathrm{x}|_S \in D(g)\} = \{\mathrm{x}_0\}.$$

Тепер нарізно неперервність функції f в точці x_0 випливає із відкритості G і нарізно неперервності функції g. $\square$

З іншого боку для сильної $(n-1)$-неперервності отримується наступна необхідна умова.

Твердження 3.2. *Нехай $n \geqslant 2$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – T_1 простори,*

$$\mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}) \in X,$$

де $X = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$, $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$ – сильно $(n-1)$-неперервна функція з $D(f) = \{\mathrm{x}_0\}$. Тоді для довільного $1 \leqslant k \leqslant n$ точка $x_{0,k}$ є неізольованою в X_k.

Доведення. Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що точка $x_{0,1}$ є ізольованою в X_1. Тоді $S = \{2, 3, \dots, n\}$ і f є S-неперервною в точці x_0, а оскільки $x_{0,1}$ є ізольованою, то f є неперервною в точці x_0, що суперечить умові.

Міркуючи аналогічним чином, отримуємо, що всі точки $x_{0,k}$ є неізольованими в X_k. □

Наступне твердження дає достатні умови існування нарізно неперервної функції з одноточковим розривом.

Твердження 3.3. *Нехай $n \geqslant 2$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ – гаусдорфові простори,*

$$\mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n}) \in \prod_{k=1}^{n} X_k$$

і для довільного натурального числа $k \leqslant n$ існує послідовність функціонально відкритих множин $\{U_{k,m}\}_{m=1}^{\infty}$ в просторі X_k така, що при $m \to \infty$

$$x_{0,k} \notin U_{k,m}, \qquad U_{k,m} \to x_{0,k}.$$

Тоді існує сильно $(n-1)$-неперервна функція $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to [0,1]$ така, що $D(f) = \{\mathrm{x}_0\}$.

Доведення. Позначимо $Y = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$. Оскільки для кожного $1 \leqslant k \leqslant n$ і для довільного натурального m множина $U_{k,m}$ функціонально відкрита в просторі X_k, то множина

$$V_m = \prod_{k=1}^{n} U_{k,m}$$

є функціонально відкритою в просторі Y. Тоді для довільного натурального m існує неперервна функція $\varphi_m : Y \to [0,1]$ така, що

$$V_m = \varphi_m^{-1}((0,1]) \qquad \text{і} \qquad \sup_{y \in V_m} \varphi_m = 1.$$

Розглянемо функцію $f : Y \to [0,1]$

$$f(y) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(y).$$

Покажемо, що дана функція задовільняє умови твердження. Спочатку покажемо, що функція розривна в точці $y_0 = \mathrm{x}_0 \in Y$. Оскільки для довільного m ми маємо, що $y_0 \notin V_m$, то $f(y_0) = 0$. Нехай V – довільний окіл точки y_0. Оскільки $V_m \to y_0$, то існує натуральне число M таке, що $V_M \subseteq V$. Тоді матимемо, що

$$\omega_f(V) \geqslant \sup_{y \in V}(f(y) - f(y_0)) = \sup_{y \in V} f(y) \geqslant \sup_{y \in V_M} \varphi_M(y) = 1.$$

Отже, функція f розривна в точці y_0.

Тепер візьмемо точку $y_1 \in Y \backslash \{y_0\}$. Зауважимо, що Y гаусдорфовий простір як добуток гаусдорфових. Тому існують околи W_0 і W_1 точок y_0 і y_1 відповідно такі, що

$$W_0 \cap W_1 = \varnothing.$$

Оскільки $V_m \to y_0$, то існує натуральне число M таке, що для довільних натуральних чисел $m \geqslant M$ виконується, що $V_m \subseteq W_0$. Тоді матимемо, що звуження

$$f|_{W_1} = \sum_{m=1}^{M-1} \varphi_m(y)$$

є скінченною сумою неперервних функцій, а тому є неперервним. Отже, f неперервна в точці y_1 і $D(f) = \{y_0\}$.

Тепер покажемо, що f є сильно $(n-1)$-неперервною. Нехай $\mathcal{S}$ – це система всіх $(n-1)$-елементних підмножин множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ і $S \in \mathcal{S}$. Без втрати загальності вважатимемо, що $S = \{2, \ldots, n\}$. Покажемо, що f є S-неперервною. Для цього нам досить встановити, що для довільного $x_1 \in X_1$ функція $f_{x_1} : \prod\limits_{k=2}^{n} X_k \to [0, 1]$

$$f_{x_1}(x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

є неперервною.

Якщо $x_1 = x_{0,1}$, то $f_{x_1} = 0$, адже $x_1 \notin U_{k,m}$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Отже, f_{x_1} є неперервною. Якщо ж $x_1 \neq x_{0,1}$, то згідно із доведеним вище, для довільних $(x_2, \ldots, x_n) \in \prod\limits_{k=2}^{n} X_k$ функція f є неперервною в точці $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тому функція f_{x_1}, є неперервною в точці $(x_2, \ldots, x_n)$, як звуження неперервної функції. Отже, в будь-якому випадку функція f_{x_1} є неперервною, а функція f є сильно $(n-1)$-неперервною. □

Для одержання необхідності відповідних умов нам буде потрібно наступне допоміжне твердження.

Твердження 3.4. *Нехай $n \geqslant 2, X_1, X_2, \ldots, X_n$ – цілком регулярні простори, $x_{0,1} \in X_1, x_{0,2} \in X_2, \ldots, x_{0,n} \in X_n$ – неізольовані точки. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) *існує послідовність* $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ *непорожніх відкритих множин* U_m *в просторі* $X = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ *така, що* $U_m \to \mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n})$*;*

(ii) *для кожного* $1 \leqslant k \leqslant n$ *існує послідовність* $\{U_{k,m}\}_{m=1}^{\infty}$ *непорожніх відкритих множин* $U_{k,m}$ *в просторі* X_k *така, що* $U_{k,m} \to x_{0,k}$ *і* $x_{0,k} \notin U_{k,m}$ *для кожного* $m \in \mathbb{N}$.

Доведення. (i)⇒(ii). Для довільних $m \in \mathbb{N}$ і $k \leqslant n$ виберемо відкриту непорожню множину $V_{k,m}$ в X_k такі, що

$$\prod_{k=1}^{n} V_{k,m} \subseteq U_m.$$

Оскільки $U_m \to \mathrm{x}_0$, то $V_{k,m} \to x_{0,k}$ для довільного $k \leqslant n$. Тепер беручи до уваги неізольованість точок $x_{0,k}$ в X_k, виберемо відкриті непорожні множини

$$U_{k,m} \subseteq V_{k,m} \setminus \{x_{0,k}\}.$$

Легко бачити, що $U_{k,m} \to x_{0,k}$ для кожного k.

(ii)⇒(i). Достатньо покласти $U_m = \prod\limits_{k=1}^{n} U_{k,m}$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. □

Тепер перейдемо до доведення необхідності.

Твердження 3.5. *Нехай* $n \geqslant 2, X_1, X_2, \ldots, X_n$ *– компактні гаусдорфові простори,* $\mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}) \in \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$*,* $x_{0,k}$ *– неізольована точка в* X_k *для довільного* $1 \leqslant k \leqslant n$ *та існує нарізно неперервна функція* $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to \mathbb{R}$ *з* $D(f) = \{\mathrm{x}_0\}$*. Тоді для довільного натурального числа* $1 \leqslant k \leqslant n$ *існує послідовність непорожніх функціонально відкритих множин* $\{U_{k,m}\}_{m=1}^{\infty}$*, яка збігається до* $x_{0,k}$*, причому* $x_{0,k} \notin U_{k,m}$ *для довільного натурального* m.

Доведення. Доведемо дане твердження методом математичної індукції відносно кількості змінних n. Для $n = 2$ твердження виконується згідно з [10, теорема 4]. Доведемо дане твердження для n множників, де $n \geqslant 3$.

Нехай твердження виконується для добутку довільних $n-1$ множників X_k. Доведемо дане твердження для n множників. Зафіксуємо $k \leqslant n$ і покажемо, що існує шукана послідовність $\{U_{k,m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Візьмемо довільне $i \leqslant n$ таке, що $i \neq k$. Позначимо

$$\mathrm{y}_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,i-1}, x_{0,i+1}, \ldots, x_{0,n}) \in Y = \prod_{k \neq i} X_k.$$

Розглянемо функцію $g : Y \to \mathbb{R}$

$$g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{0,i}, x_{i+1}, \ldots x_n).$$

Зрозуміло, що g є нарізно неперервною функцією $(n-1)$ змінних на Y, як звуження нарізно неперервної функції. Крім того, оскільки $D(f) = \{\mathrm{x}_0\}$, то $D(g) \subseteq \{\mathrm{y}_0\}$. Отже, можливі два випадки $D(g) = \varnothing$ або $D(g) = \{\mathrm{y}_0\}$.

Спочатку розглянемо випадок $D(g) = \{\mathrm{y}_0\}$. Тоді згідно із індуктивним припущенням, для множини X_k існує шукана послідовність

$$\{U_{k,m}\}_{m=1}^{\infty}.$$

Тепер нехай $D(g) = \varnothing$, тобто функція g неперервна. Розглянемо функцію $h : Y \times X_i \to \mathbb{R}$

$$h(y, x_i) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n),$$

де $y = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Покажемо, що функція h є нарізно неперервною.

Неперервність h відносно змінної x_i випливає з неперервності функції f відносно цієї змінної. Крім того, оскільки $D(f) = \{\mathrm{x}_0\}$, то

$$D(h) = \{(\mathrm{y}_0, x_{0,i})\}$$

Тому функція h неперервна відносно змінної y в кожній точці відмінній від $(\mathrm{y}_0, x_{0,i})$. Разом із тим, $h_{x_{0,1}}(y) = g(y)$, а отже, функція $f_{x_{0,i}}$ є неперервною.

Звіджси слідує, що h буде неперервною відносно y, і таким чином, h – нарізно неперервна функція. Оскільки Y і X_i гаусдорфові компакти, то із [10, теорема 4] випливає, що існує послідовність $\{V_m\}_{m=1}^{\infty}$ в Y така, що $V_m \to \mathrm{y}_0$. Тепер із твердження 3.4 випливає, що існує шукана послідовність $\{U_{k,m}\}_{m=1}^{\infty}$.

Отже, згідно із принципом математичної індукції, твердження є вірним. □

Наступний результат є основним у даній роботі.

Теорема 3.6. *Нехай* $n \geqslant 2, X_1, X_2, \ldots, X_n$ *– компактні гаусдорфові простори,* $\mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n}) \in \prod\limits_{m=1}^{n} X_m$, $x_{0,k}$ *– неізольована точка в* X_k *для довільного* $1 \leqslant k \leqslant n$. *Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) *існує нарізно неперервна функція* $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to [0,1]$ *така, що* f *є сильно* $(n-1)$*-неперервною із* $D(f) = \{\mathrm{x}_0\}$*;*

(ii) *існує нарізно неперервна функція* $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to [0,1]$ *така, що* f *є* $\mathcal{S}$*-неперервною для довільної системи* $\mathcal{S}$ *власних підмножин множини* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *із* $D(f) = \{\mathrm{x}_0\}$*;*

(iii) *існує нарізно неперервна функція* $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to [0,1]$ *із* $D(f) = \{\mathrm{x}_0\}$*;*

(iv) *існує послідовність* $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ *непорожніх відкритих множин* U_m *в просторі* $X = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ *така, що* $U_m \to \mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n})$*.*

Доведення. Імплікація (i) $\Rightarrow$ (ii) випливає з твердження 2.3, імплікація (ii) $\Rightarrow$ (iii) – з твердження 2.1, (iii) $\Rightarrow$ (iv) – з твердження 3.5 і нарешті (iv) $\Rightarrow$ (i) отримуємо із тверджень 3.4 та 3.3. $\square$

У зв'язку з даним результатом природно навести приклади просторів, у яких кожна неізольована точка задовільняє умову (iv) теореми 3.6. Зрозуміло, що кожний простір із першою аксіомою зліченності задовільняє дану умову. Разом із тим, згідно із теоремою Прейса-Сімона (теорема 5 із [5]) кожний компакт Еберлейна також володіє цією властивістю. З іншого боку, навіть у класі сепарабельних просторів є простори, до жодної точки яких не збігаються послідовності відкритих множин. Як випливає із теореми 9 з [9] і теореми 3.6 такими просторами є тихонівські куби $[0,1]^S$ для незліченної множини S.

Література

[1] R. Baire. Sur les fonctions de variables reélles. 3(1):1–123, 1899. doi:10.1007/BF02419243.

[2] V. K. Maslyuchenko, O. V. Maslyuchenko, V. V. Mykhaylyuk, and O. V. Sobchuk. Paracompactness and separately continuous mappings. In *General topology in Banach spaces*, pages 147–169. Nova Sci. Publ., Huntington, NY, 2001.

[3] I. Namioka. Separate continuity and joint continuity. *Pacific J. Math.*, 51:515–531, 1974. URL: http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102912474.

[4] Z. Piotrowski. Separate and joint continuity. *Real. Anal. Exch.*, 11(2):283–322, 1985-1986. doi:10.2307/44151750.

[5] David Preiss and Petr Simon. A weakly pseudocompact subspace of Banach space is weakly compact. *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 15:603–609, 1974. URL: http://eudml.org/doc/16650.

[6] В. К. Маслюченко. *Нарізно неперервні відображення і простори Кете.* дис. доктора фіз.-мат. наук: 01.01.01. Чернівці, 1999.

[7] В. К. Маслюченко and В. В. Михайлюк. Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів. *Український математичний журнал*, 52(6):740–747, 2000.

[8] В. К. Маслюченко and В. В. Михайлюк. Нарізно неперервні функції багатьох змінних на добутку просторів, які є добутками метризовних множників. *Математичний Вісник НТШ*, 1:77–84, 2004.

[9] В. К. Маслюченко, В. В. Михайлюк, and О. В. Собчук. Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень. *Український математичний журнал*, 44(9):1209–1220, 1992.

[10] В. В. Михайлюк. Одноточкові розриви нарізно неперервних функцій на добутку двох компактних просторів. *Український математичний журнал*, 57(1):94–101, 2005.

Надійшла до редакції 31 січня 2023, прийнята до друку 9 березня 2023.

Козловський Микола Романович
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
вулиця Коцюбинського, 2, Чернівці, Чернівецька область, 58012
Email: mathematic204chnu@gmail.com