Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 13, no. 3 (2020) pp. 18–32

Квазі-геодезичні відображення спеціальних псевдоріманових просторів

Курбатова I.M., Пiструiл M.I.

Abstract. The article is devoted to the study of a special type of diffeomorphisms of pseudo-Riemannian spaces with an affinor structure.

In [12] we studied mappings of pseudo-Riemannian spaces, which are quasi-geodesic, [16], and at the same time almost geodesic of the second type [17]. By definition, for a quasi-geodesic mapping corresponding to the affinor F_i^h, each geodesic curve in the space (V_n, g_{ij}) is mapped onto the so-called quasi-geodesic curve in another space $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, F_i^h)$. In [12, 18] it was assumed that the quasi-geodesic mapping V_n onto $\overline{V}_n$ satisfies the condition of reciprocity, i.e. the inverse mapping is also quasi-geodesic, corresponding to the same affinor F_i^h. In this case, the affinor satisfies the purely algebraic conditions (consistency with the metric tensors V_n and $\overline{V}_n$). With an almost geodesic mapping of the second type, by definition, each geodesic curve in (V_n, g_{ij}, F_i^h) is mapped onto an almost geodesic curve in $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$, if the affinor F_i^h in V_n satisfies a certain differential equation. In [12] it is proved that the set of the specified algebraic and differential conditions leads to the fact that the affinor F_i^h necessarily determines the e-structure in V_n, and elliptic and hyperbolic cases are considered. We call an affinor with such conditions a generalized-recurrent structure (and V_n with such a structure, respectively, a generalized-recurrent space). In what follows, we study quasi-geodesic mappings of parabolic type generalized-recurrent spaces.

In this paper, we obtain the properties of the Riemannian tensor of generalized-recurrence space associated with the generalized-recurrence vector. It is proved that the class of pseudo-Riemannian spaces with generalized-recurrent structure of parabolic type is closed with respect to the considered mappings, but the vectors of generalized recurrence of spaces V_n and $\overline{V}_n$ may be distinct. If the generalized recurrence vector is gradient, there is a K-structure in the generalized-recurrence space. It is proved that if K-space admits a quasi-geodesic mapping, which preserves an integrable parabolic type K-structure, then this K-structure is Kähler (note that an integrable K-structure of parabolic type may not be Kähler). The structure of the Riemannian tensor

Ключові слова: affinor structure, quasi-geodesic maps
DOI: http://dx.doi.org/10.15673/tmgc.v13i3.1770

of parabolic type generalized-recurrent space, which admits quasi-geodesic mapping onto a flat space, is found. The components of the metric tensor of such a space in a special coordinate system are given.

Анотація. Стаття присвячена дослідженню спеціального типу дифеоморфізмів псевдоріманових просторів з афінорною структурою.

В [12] вивчалися дифеоморфізми псевдоріманових просторів, які є квазі-геодезичними відображеннями [16] і водночас майже геодезичними другого типу [17]. За означенням при квазі-геодезичному відображенні, що відповідає афінору F_i^h, геодезичні лінії простору (V_n, g_{ij}) переходять в так звані квазі-геодезичні лінії іншого простору $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, F_i^h)$. В [12, 18] вважалося, що КГВ V_n на $\overline{V}_n$ задовольняє умові взаємності, тобто зворотне відображення також є квазі-геодезичним, відповідаючим тому ж афінору F_i^h. При цьому умови на афінор носять суто алгебраїчний характер (узгодженість з метричними тензорами V_n і $\overline{V}_n$). При майже геодезичному відображенні другого типу за означенням геодезичні лінії (V_n, g_{ij}, F_i^h) переходять в майже геодезичні лінії $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$, якщо афінор F_i^h в V_n задовольняє певним диференціальним рівнянням. В [12] доведено, що сукупність вказаних алгебраїчних і диференціальних умов приводить до того, що афінор F_i^h необхідно визначає на V_n e-структуру, і розглянуто еліптичний та гіперболічний випадки. Ми називаємо афінорну структуру з такими умовами узагальнено-рекурентною (а V_n з такою структурою, відповідно, узагальнено-рекурентним простором) і обираємо для дослідження квазі-геодезичні відображення узагальнено-рекурентних просторів параболічного типу.

В даній статті знайдено зв'язок тензора Рімана узагальнено-рекурентного простору з вектором узагальненої рекурентності. Доведено, що клас псевдо-ріманових просторів з узагальнено-рекурентною структурою параболічного типу замкнений відносно розглядуваних відображень, але при цьому вектори узагальненої рекурентності просторів V_n і $\overline{V}_n$ можуть виявитись не тотожними. Якщо вектор узагальненої рекурентності градієнтний, в узагальнено-рекурентному просторі існує K-структура. Доведено, що якщо K-простір допускає квазі-геодезичне відображення зі збереженням інтегровної K-структури параболічного типу, то ця K-структура є келеровою, хоча сама по собі інтегровна K-структура параболічного типу може не бути келеровою. Знайдена структура тензора Рімана узагальнено-рекурентного простору параболічного типу, який допускає квазі-геодезичне відображення на плоский простір. Наведено компоненти метричного тензора такого простору в спеціальній системі координат.

1. Вступ

Одним з найбільш змістовних (в прикладному сенсі) узагальненням поняття геодезичного відображення [17] ріманових просторів є запропоноване академіком А. З. Петровим квазі-геодезичне відображення (надалі КГВ) псевдоріманових просторів V_4 сігнатури Мінковського [16].

При цьому рух вільної частинки в одному фізичному полі моделюється рухом частинки в іншому полі під дією деякої сили (наприклад, на рухомий електричний заряд в електромагнітному полі діє сила Лоренца). З геометричної точки зору це означає, що геодезичні лінії простору (V_4, g_{ij}) переходять в так звані квазі-геодезичні лінії іншого простору $(\overline{V}_4, \overline{g}_{ij})$.

А. З. Петров знайшов основні рівняння квазі-геодезичного відображення V_4 на $\overline{V}_4$ в спільній за відображенням системі координат у вигляді:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_{(i}(x)\delta^h_{j)} + \phi_{(i}(x)F^h_{j)}(x), \tag{1.1}$$
$$\overline{g}_{i\alpha}F^\alpha_j = -\overline{g}_{j\alpha}F^\alpha_i, \qquad i, h, j, ... = 1, 2, 3, 4,$$

де $\Gamma^h_{ij}, \overline{\Gamma}^h_{ij}$ – компоненти об'єктів зв'язності $V_4, \overline{V}_4$, відповідно, $\psi_i(x), \phi_i(x)$ – деякі ковектори, F^h_i – афінор, а дужками позначена операція симетрування по відповідних індексах.

Дослідженню КГВ при деяких додаткових умовах присвячені роботи [13, 14, 12]. Там поняття КГВ узагальнено на випадок псевдоріманових просторів довільної сігнатури і розмірності, причому в [18] вважається, що КГВ V_n на $\overline{V}_n$ задовольняє умові взаємності, тобто зворотне відображення також є квазі-геодезичним, відповідаючим тому ж афінору F^h_i. Отже в V_n також виконуються співвідношення

$$g_{i\alpha}F^\alpha_j = -g_{j\alpha}F^\alpha_i, \tag{1.2}$$

Іншим найбільш природним з геометричної точки зору узагальненням геодезичного відображення є майже геодезичні відображення афінозв'язних і ріманових просторів [17], введені до розгляду Н. С. Сінюковим. В останні десятиліття з'явилося багато наукових робіт [2, 1, 7, 10], що присвячені дослідженню майже геодезичних відображень і містять цікаві результати.

Класи квазі-геодезичних і майже геодезичних відображень мають істотний перетин, якому належать, наприклад голоморфно-проективні відображення келерових просторів [8, 3, 5, 6, 9, 4]. Найбільш близькими до КГВ є майже геодезичні відображення 2-го типу [17] з основними рівняннями (1.1) (при $i, h, j, ... = 1, 2, ..., n$), в яких афінор задовольняє диференціальним умовам

$$F^h_{(i,j)} + F^h_\alpha F^\alpha_{(i}\phi_{j)} = p_{(i}\delta^h_{j)} + q_{(i}F^h_{j)}, \tag{1.3}$$

де p_i, q_i – деякі ковектори, а "," – знак коваріантної похідної відносно зв'язності простору V_n.

Ми розглядаємо відображення псевдоріманових просторів, що належать зазначеному перетину, а саме КГВ, при якому афінор F^h_i задовольняє диференціальним умовам (1.3).

В [12] доведено, що афінор F_i^h, який задовольняє (1.3) і узгоджений з метрикою g_{ij} у вигляді (1.2), необхідно визначає на V_n так звану e-структуру [17], тобто мають місце співвідношення

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = e\delta_i^h, \tag{1.4}$$

де $e = -1, +1$ або 0. При цьому e-структуру називають

- *еліптичною*, якщо $e = -1$,
- *гіперболічною*, коли $e = +1$,
- *m-параболічною* при $e = 0$, $\mathrm{rank} F = m$, $(2m < n)$ та
- *параболічною* при $e = 0$, $\mathrm{rank} F = m$, $(2m = n)$.

В [12, 18] вивчалися КГВ псевдоріманових просторів (V_n, g_{ij}, F_i^h), на яких афінор задає K-структуру [11] еліптичного або гіперболічного типів, тобто задовольняє (1.4) при $e = +1, -1$, а також диференціальним умовам

$$F^h_{(i,j)} = 0.$$

Метою нашого дослідження будуть квазі-геодезичні відображення псевдоріманових просторів довільної розмірності, які задовольняють умові взаємності і водночас є майже геодезичними відображеннями 2-го типу.

Дослідження ведеться в тензорній формі, локально, в класі дійсних досить гладких функцій.

2. Поняття і властивості узагальнено-рекурентної структури

1°. Розглянемо простір (V_n, g_{ij}, F_i^h), в якому афінор F_i^h задовольняє умовам (1.3) і (1.4):

$$F^h_{(i,j)} + F^h_\alpha F^\alpha_{(i}\phi_{j)} = p_{(i}\delta^h_{j)} + q_{(i}F^h_{j)},$$
$$F_\alpha^h F_i^\alpha = e\delta_i^h.$$

Будемо називати таку афінорну структуру *узагальнено-рекурентною* (еліптичного, гіперболічного або параболічного типу залежно від значення e), а сам простір V_n – *узагальнено-рекурентним* відповідного типу. Зауважимо, що K-структура є окремим випадком узагальнено-рекурентної.

Іншим окремим випадком узагальнено-рекурентної структури є введена в [15] рекурентно-параболічна афінорна структура, яка визначається умовами

$$F_\alpha^h F_i^\alpha = 0, \qquad g_{i\alpha}F_j^\alpha = -g_{j\alpha}F_i^\alpha, \qquad F^h_{i,j} = q_j F_i^h.$$

Розглянемо властивості узагальнено-рекурентної структури параболічного типу.

2°. По-перше доведемо

Твердження 2.1. *Якщо афінорна структура* F_i^h *узагальнено-рекурентного простору параболічного типу* (V_n, g_{ij}, F_j^h) *узгоджена з метричним тензором* g_{ij} *у формі* (1.2)*:*

$$g_{i\alpha}F_j^\alpha = -g_{j\alpha}F_i^\alpha,$$

то диференціальні рівняння (1.3) *набувають вигляду*

$$F^h_{(i,j)} = F^h_{(i}q_{j)}.$$

Доведення. Дійсно, опускаючи в (1.3) індекс h за допомогою метричного тензора g_{ij} з урахуванням

$$F^h_\alpha F^\alpha_i = 0 \tag{2.1}$$

отримаємо:

$$F_{h(i,j)} = g_{h(j}p_{i)} + F_{h(j}q_{i)}.$$

Проциклюємо цю рівність по h, i, j з урахуванням (1.2) і згорнемо з g^{jh} по індексах j, h. В результаті маємо

$$p_i = 0.$$

Отже за умов (1.2) і (2.1) рівність (1.3) набуває вигляду

$$F^h_{(i,j)} = F^h_{(i}q_{j)}. \tag{2.2}$$

Твердження доведено. □

Умовимось називати вектор q_i в (2.2) *вектором узагальненої рекурентності* структури F_i^h.

Зауваження 2.2. При $q_i = 0$ узагальнено-рекурентна структура є K-структурою, а за умови градієнтності q_i узагальнено-рекурентний простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускає K-структуру $\tilde{F}_i^h = e^{-q}F_i^h$.

3°. Домовимося надалі операцію згортання з афінором називати сполученням за відповідним індексом і позначати наступним чином:

$$A^{\cdots}_{j_1\ldots j_{k-1}\alpha j_{k+1}\ldots j_r}F_i^\alpha = A^{\cdots}_{j_1\ldots j_{k-1}\bar{i}j_{k+1}\ldots j_r},$$

$$A^{j_1\ldots j_{k-1}\alpha j_{k+1}\ldots j_r}_{\cdots}F_\alpha^h = A^{j_1\ldots j_{k-1}\overline{h}j_{k+1}\ldots j_r}_{\cdots}.$$

4°. Інтегровна параболічна *e-структура* F_i^h в деякому околі кожної точки V_n за рахунок вибору системи координат (адаптованої до афінора), може бути приведена до вигляду

$$(F_i^h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I_m & 0 \end{pmatrix},$$

де I_m – одинична матриця порядку $m = \frac{n}{2}$.

Надалі нам буде корисний допоміжний тензор A_i^h, який в адаптованій системі координат визначається матрицею

$$(A_i^h) = \begin{pmatrix} P & I_m \\ -P^2 & -P \end{pmatrix},$$

де P – довільна квадратна матриця порядку m.

При цьому, очевидно, за необхідністю

$$F_\alpha^\beta A_\beta^\alpha = m, \qquad A_\alpha^h A_i^\alpha = 0, \qquad F_\alpha^h A_i^\alpha + A_\alpha^h F_i^\alpha = \delta_i^h. \tag{2.3}$$

5°. Доведемо

Твердження 2.3. *Тензор Рімана узагальнено-рекурентного простору параболічного типу* (V_n, g_{ij}, F_i^h) *задовольняє співвідношенням*

$$3(R_{\bar{h}jki} + R_{h\bar{j}ki} + R_{hj\bar{k}i} + R_{hjk\bar{i}}) = 2Q_{jhki} + Q_{jkhi} - Q_{hkji},$$

де

$$Q_{hjki} = q_{[h,j]}F_{ki} + q_{[k,i]}F_{hj}.$$

Доведення. Опустимо в (2.2) індекс h в V_n і продиференціюємо коваріантно по x^k отримані співвідношення:

$$F_{hi,jk} + F_{hj,ik} = (F_{h(i}q_{j)})_{,k}. \tag{2.4}$$

З огляду на (2.2) цей вираз може бути переписано інакше:

$$F_{hi,[jk]} + F_{hj,[ik]} - F_{hk,(ij)} = (F_{h(i}q_{j)})_{,k} - (F_{h(i}q_{k)})_{,j} - (F_{h(k}q_{j)})_{,i}$$

або

$$\begin{aligned} F_{hi,[jk]} + F_{hj,[ik]} - F_{hk,(ij)} = \\ F_{hi,k}q_j + F_{hj,k}q_i + F_{hi}q_{j,k} + F_{hj}q_{i,k} - F_{hi,j}q_k - F_{hi}q_{k,j} - \\ - F_{hk}q_{i,j} - F_{hk,j}q_i - F_{hk,i}q_j - F_{hk}q_{j,i} - F_{hj,i}q_k - F_{hj}q_{k,i}. \end{aligned}$$

Симетруючи тут по h, k, з урахуванням тотожності Річчі і (2.2) та після зведення подібних маємо:

$$\begin{aligned} R_{\bar{i}hjk} - R_{\bar{h}ijk} + R_{\bar{j}hik} - R_{\bar{h}jik} + \\ + R_{\bar{i}kjh} - R_{\bar{k}ijh} + R_{\bar{j}kih} - R_{\bar{k}jih} = Q_{jkhi} + Q_{jhki}, \end{aligned}$$

де позначено

$$Q_{jhki} = q_{[j,h]}F_{ki} + q_{[k,i]}F_{jh}.$$

Альтернуючи результат по h, j і застосовуючи тотожність Біанкі, нарешті отримуємо

$$3(R_{\bar{h}jki} + R_{h\bar{j}ki} + R_{hj\bar{k}i} + R_{hjk\bar{i}}) = 2Q_{jhki} + Q_{jkhi} - Q_{hkji}. \tag{2.5}$$

Твердження доведено. □

При $q_i = 0$ узагальнено-рекурентна структура F_i^h є K-структурою, отже в K-просторі тензор Рімана характеризується властивістю

$$R_{\bar{h}jki} + R_{h\bar{j}ki} + R_{hj\bar{k}i} + R_{hjk\bar{i}} = 0,$$

або після піднімання індекса h в V_n

$$-R^{\bar{h}}_{jki} + R^{h}_{\bar{j}ki} + R^{h}_{j\bar{k}i} + R^{h}_{jk\bar{i}} = 0. \tag{2.6}$$

Має місце

Теорема 2.4. *В узагальнено-рекурентному просторі параболічного типу (V_n, g_{ij}, F_j^h) рівність*

$$R_{\bar{h}jki} + R_{h\bar{j}ki} + R_{hj\bar{k}i} + R_{hjk\bar{i}} = 0$$

виконується тоді і тільки тоді, коли вектор узагальненої рекурентності q_i градієнтний, тобто в V_n існує K-структура $\tilde{F}_i^h = e^{-q} F_i^h$.

Доведення. Дійсно, якщо вектор узагальненої рекурентності q_i градієнтний, то $Q_{hjki} = 0$ і (2.5) набуває вигляду

$$R_{\bar{h}jki} + R_{h\bar{j}ki} + R_{hj\bar{k}i} + R_{hjk\bar{i}} = 0, \tag{2.7}$$

звідки, до речі, після згортання з g^{jk} по індексах j, k випливає, що

$$R_{\bar{h}i} = -R_{h\bar{i}},$$

де R_{hi} – тензор Річчі.

З іншого боку, можно довести, що якщо тензор Рімана узагальнено-рекурентного простору параболічного типу задовольняє (2.7), то вектор узагальненої рекурентності q_i необхідно градієнтний.

Дійсно, з (2.5) за умови (2.7) маємо:

$$2Q_{jhki} + Q_{jkhi} - Q_{hkji} = 0.$$

Із означення тензора Q_{jhki} бачимо, що $Q_{jhki} = -Q_{hjki}$, тому симетрування останнього співвідношення по індексах j, k дає нам

$$Q_{jhki} + Q_{khji} = 0$$

або

$$q_{jh} F_{ki} + q_{ki} F_{jh} + q_{kh} F_{ji} + q_{ji} F_{kh} = 0, \qquad q_{ij} = q_{[i,j]}. \tag{2.8}$$

Введемо до розгляду вектори a^i і b^i такі, що $a^\alpha F_{\alpha i} \neq 0$, $a^\alpha F_{\alpha\beta} b^\beta = 1$ і згорнемо послідовно (2.8) з a^j по j, з $a^h b^i$ по h, i, з b^k по k:

$$a^\alpha q_{\alpha h} F_{ki} + q_{ki} a^\alpha F_{\alpha h} + q_{kh} a^\alpha F_{\alpha i} + a^\alpha q_{\alpha i} F_{kh} = 0, \tag{2.9}$$

$$a^\alpha q_{\alpha k} + a^\alpha b^\beta q_{\alpha\beta} a^\gamma F_{\gamma k} = 0,$$

$$2a^\alpha b^\beta q_{\alpha\beta} = 0.$$

З огляду на дві останні рівності (2.9) приймає вигляд

$$q_{ki}a^{\alpha}F_{\alpha h} + q_{kh}a^{\alpha}F_{\alpha i} = 0. \qquad (2.10)$$

Тепер згорнемо (2.10) послідовно з b^h по індексу h та з b^i по i:

$$q_{ki} + b^{\beta}q_{k\beta}a^{\alpha}F_{\alpha i} = 0,$$

$$2b^{\beta}q_{k\beta} = 0.$$

Звідси маємо

$$q_{ki} = q_{[k,i]} = 0.$$

Отже при

$$R_{\bar{h}jki} + R_{h\bar{j}ki} + R_{hj\bar{k}i} + R_{hjk\bar{i}} = 0$$

вектор q_i – градієнтний, тобто в узагальнено-рекурентному просторі V_n існує K-структура $\tilde{F}_i^h = e^{-q}F_i^h$. □

6°. Розглянемо випадок, коли узагальнено-рекурентна структура параболічного типу інтегровна. Доведемо

Твердження 2.5. *Афінорна структура узагальнено-рекурентного простору параболічного типу* (V_n, g_{ij}, F_j^h) *за умови її інтегровності характеризується властивостями*

$$F_{i,\alpha}^{\alpha} = 0,$$

$$F_{\bar{j},i}^{h} = F_{j,\bar{i}}^{h} = F_{j,i}^{\bar{h}} = 0.$$

Доведення. Дійсно, як відомо, один з критеріїв інтегровності e-структури стверджує, що в цьому разі дорівнює нулю її тензор Нейєнхейса [17]:

$$N_{ij}^h = F_{\bar{i},j}^h - F_{j,\bar{i}}^h - F_{\bar{j},i}^h + F_{i,\bar{j}}^h = 0. \qquad (2.11)$$

Оскільки з огляду на (2.1) та (2.2)

$$F_{\bar{i},j}^h = -F_{i,j}^{\bar{h}} = F_{j,i}^{\bar{h}} = -F_{\bar{j},i}^h,$$

то (2.11) набувають вигляду

$$4F_{\bar{j},i}^h - q_{\bar{j}}F_i^h + q_{\bar{i}}F_j^h = 0 \qquad (2.12)$$

або, що те ж саме,

$$4F_{h\bar{j},i} - q_{\bar{j}}F_{hi} + q_{\bar{i}}F_{hj} = 0.$$

Після симетрування по h, i звідси випливає

$$q_{\bar{i}}F_{hj} + q_{\bar{h}}F_{ij} = 0,$$

або

$$q_{\bar{i}}F_h^j + q_{\bar{h}}F_i^j = 0.$$

Згортаючи отримане рівняння з q_j по індексу j, знаходимо

$$q_{\bar{i}} q_{\overline{h}} = 0,$$

звідки

$$q_{\bar{i}} = 0. \tag{2.13}$$

Тоді з (2.2) випливає бездивернійність афінора

$$F^{\alpha}_{i,\alpha} = 0,$$

а з (2.11) та (2.12)

$$F^{h}_{\bar{j},i} = F^{h}_{j,\bar{i}} = F^{\overline{h}}_{j,i} = 0. \tag{2.14}$$

Твердження доведено. □

Неважко перевірити, що для інтегровності узагальнено-рекурентної структури достатньо умов $F^h_{j,\bar{i}} = 0$, $F^{\alpha}_{i,\alpha} = 0$ (для K-структури лише $F^h_{j,\bar{i}} = 0$).

Зауважимо, що на відміну від гіперболічного та еліптичного типів, інтегровна узагальнено-рекурентна структура параболічного типу (зокрема параболічна K-структура) не є обов'язково келеровою, тобто із співвідношень (2.14) не випливає коваріантна сталість афінора F^h_i.

Домовимось надалі в цій статті роглядати тільки інтегровну афінорну структуру.

3. КГВ узагальнено-рекурентних просторів параболічного типу

1°. Нехай узагальнено-рекурентний псевдоріманів простір параболічного типу (V_n, g_{ij}, F^h_i) допускає нетривіальне КГВ на простір $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$, яке задовольняє умові взвємності. Тоді в спільній за відображенням системі координат (x^i) виконуються основні рівняння

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_{(i}(x)\delta^h_{j)} + \phi_{(i}(x)F^h_{j)}(x), \tag{3.1}$$

$$F_{ij} = -F_{ji}, \quad F_{ij} = g_{i\alpha}F^{\alpha}_j, \quad \overline{F}_{ij} = -\overline{F}_{ji}, \quad \overline{F}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}F^{\alpha}_j, \tag{3.2}$$

$$F^h_{\alpha}F^{\alpha}_i = 0, \tag{3.3}$$

$$F^h_{(i,j)} = F^h_{(i}q_{j)}. \tag{3.4}$$

Зауважимо, що коли в (3.1) $\phi_i \neq 0$ і $\psi_i = 0$, квазі-геодезичне відображення називають *канонічним.* В даній статті досліджуються КГВ, які не є канонічними. Має місце

Теорема 3.1. *Образом узагальнено-рекурентного простору параболічного типу при КГВ буде також узагальнено-рекурентний простір параболічного типу.*

Доведення. Для того, щоб узагальнено-рекурентний простір параболічного типу (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускав нетривіальне КГВ на псевдоріманоовий простір $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$, необхідно і достатньо виконання (3.1)–(3.4).

Залежність між коваріантними похідними афінора F_i^h в просторах V_n і $\overline{V}_n$ з урахуванням (3.1) та (3.3) має вигляд:

$$F^h_{i|j} = F^h_{i,j} + \psi_{\bar{i}}\delta^h_j + (\phi_{\bar{i}} - \psi_i)F^h_j, \tag{3.5}$$

де "|" – знак коваріантної похідної в $\overline{V}_n$.

Після симетрування по індексах i, j з огляду на (3.4) знайдемо:

$$F^h_{(i|j)} = \tilde{q}_{(i}F^h_{j)} + \psi_{\bar{i}}\delta^h_j + \psi_{\bar{j}}\delta^h_i, \tilde{q}_i = q_i - \psi_i + \phi_{\bar{i}}. \tag{3.6}$$

Опустимо в (3.6) індекс h в просторі $\overline{V}_n$ і проциклюємо по h, i, j. В результаті отримаємо:

$$\psi_{\bar{i}}\overline{g}_{hj} + \psi_{\bar{h}}\overline{g}_{ji} + \psi_{\bar{j}}\overline{g}_{ih} = 0.$$

Згортання цієї рівності з $\overline{g}^{hj}$ по h, j дає нам:

$$\psi_{\bar{i}} = 0 \tag{3.7}$$

і тому (3.6) набуває вигляду

$$F^h_{(i|j)} = \tilde{q}_{(i}F^h_{j)}, \tag{3.8}$$

тобто афінор F_i^h в просторі $\overline{V}_n$ також визначає узагальнено-рекурентну структуру параболічного типу. □

Зауважимо, що із співвідношень (3.5) і (3.7) випливає

Наслідок 3.2. *КГВ між узагальнено-рекурентними просторами параболічного типу (V_n, g_{ij}, F_i^h), $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, F_i^h)$ зберігає дивергенцію афінора, тобто*

$$F^\alpha_{i,\alpha} = F^\alpha_{i|\alpha}.$$

2°. Будемо казати, що КГВ узагальнено-рекурентного простору параболічного типу *зберігає вектор узагальненої рекурентності*, якщо при цьому

$$\tilde{q}_i = q_i,$$

тобто співвідношення (3.8) набувають вигляду

$$F^h_{(i|j)} = F^h_{(i,j)} = q_{(i}F^h_{j)}.$$

З (3.5) випливає, що за умови $\tilde{q}_i = q_i$ вектори ψ_i і ϕ_i в основних рівняннях КГВ (3.1) пов'язані таким чином:

$$\psi_i = \phi_{\bar{i}}. \tag{3.9}$$

З урахуванням цього зв'язку після згортання (3.1) по індексах h, j маємо:

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{i\alpha} = \Gamma^{\alpha}_{i\alpha} + (n+2)\psi_i.$$

Це свідчить про градієнтність вектора ψ_i, тобто існування функції

$$\psi(x) = \frac{1}{2} ln \left|\frac{\overline{g}}{g}\right|$$

такої, що

$$(n+2)\psi_i = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^i}.$$

3°. Має місце

Теорема 3.3. *Псевдорімановий K-простір параболічного типу, який допускає КГВ зі збереженням інтегровної K-структури, необхідно є келеровим.*

Доведення. Узагальнено-рекурентна структура стає K-структурою, коли вектор узагальненої рекурентності дорівнює нулю, або породжує K-структуру $\tilde{F}^h_i = e^{-q} F^h_i$, коли q_i є градієнтним. Отже розглянемо КГВ

$$f : (V_n, g_{ij}, F^h_i) \to (\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, F^h_i)$$

узагальнено-рекурентних просторів параболічного типу зі збереженням вектора узагальненої рекурентності q_i за умов його градієнтності і інтегровності афінорной структури F^h_i. Тоді виконуються (2.13), (2.14), (3.9), а тензори Рімана просторів V_n і $\overline{V}_n$ з огляду на (2.5) та (2.6) задовольняють співвідношенням:

$$\begin{aligned} R^{\overline{h}}_{ijk} - R^{h}_{\overline{i}jk} - R^{h}_{i\overline{j}k} - R^{h}_{ij\overline{k}} = 0, \\ \overline{R}^{\overline{h}}_{ijk} - \overline{R}^{h}_{\overline{i}jk} - \overline{R}^{h}_{i\overline{j}k} - \overline{R}^{h}_{ij\overline{k}} = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Знайдемо залежність між компонентами тензорів Рімана просторів V_n і $\overline{V}_n$, застосовуючи (3.1) і (3.9):

$$\begin{aligned} \overline{R}^h_{ijk} = R^h_{ijk} + \delta^h_k \psi_{ij} - \delta^h_j \psi_{ik} + F^h_k \phi_{ij} - F^h_j \phi_{ik} + \\ + F^h_i \phi_{[kj]} + \phi_k F^h_{i,j} - \phi_j F^h_{i,k} + \phi_i F^h_{[k,j]}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

де позначено

$$\psi_{ij} = \psi_{i,j} - \psi_i \psi_j, \qquad \phi_{ij} = \phi_{i,j} - \phi_i \phi_{\overline{j}} - \phi_j \phi_{\overline{i}}. \tag{3.12}$$

Із співвідношень (3.10) і (3.11) випливає рівність:

$$\begin{aligned} F^h_i(\phi_{\overline{j}k} - \phi_{k\overline{j}} - \phi_{\overline{k}j} + \phi_{j\overline{k}}) + F^h_j(\phi_{\overline{i}k} + \phi_{i\overline{k}}) - \\ - F^h_k(\phi_{\overline{i}j} + \phi_{i\overline{j}}) - \psi_k F^h_{i,j} + \psi_j F^h_{i,k} - \psi_i F^h_{[k,j]} = 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Опустимо тут індекс h в V_n, просиметруємо по індексах h, i, а результат проциклюємо по h, i, j. Наразі маємо:

$$F_{hk}b_{ij} + F_{ik}b_{jh} + F_{jk}b_{hi} = 0, \tag{3.14}$$

де

$$b_{ij} = \phi_{\bar{i}j} + \phi_{i\bar{j}} + \phi_{\bar{j}i} + \phi_{i\bar{j}} + \psi_{(i}q_{j)}.$$

Після згортання (3.14) з $g^{k\alpha}A^h_\alpha$ по індексах h, k (тензор A^h_i ми ввели в попередньому розділі) виявляється, що $b_{ij} = 0$, а звідси з огляду на (2.3), (3.4), (3.9) та (3.12) випливає, що

$$d_{ij} = -d_{ji}, \qquad d_{ij} = \phi_{i\bar{j}} + \psi_{ij}. \tag{3.15}$$

Повернемось до (3.13), домножимо їх на ϕ_h і потім згорнемо по індексу h. З урахуванням (3.4) та (3.15) отримаємо

$$\psi_j d_{ik} + \psi_k d_{ji} + 2\psi_i d_{jk} = 0. \tag{3.16}$$

Якщо $\psi_i \neq 0$ (КГВ не являється канонічним), існує вектор a^i такий, що $a^\alpha\psi_\alpha = 1$. Згортаючи (3.16) послідовно з a^i по i і з $a^i a^j$ по i, j знаходимо $d_{ij} = 0$, тобто з (3.15) випливає

$$\phi_{i\bar{j}} = -\psi_{ij}. \tag{3.17}$$

Використовуючи отримане співвідношення, перепишемо (3.13) у вигляді

$$F^h_k\phi_\alpha F^\alpha_{i,j} - F^h_j\phi_\alpha F^\alpha_{i,k} - F^h_i\phi_\alpha F^\alpha_{[j,k]} - \psi_k F^h_{i,j} + \psi_j F^h_{i,k} - \psi_i F^h_{[k,j]} = 0.$$

Після згортання з A^i_h по i і з A^j_h по j звідси отримуємо систему рівнянь, з якої певними алгебраїчними перетвореннями і з урахуванням (3.4) маємо:

$$\phi_\alpha F^\alpha_{j,k} = \psi_j q_k.$$

З огляду на цю рівність, (3.17) і те, що

$$\phi_{\bar{i}j} = \psi_{ij} - \phi_\alpha F^\alpha_{i,j},$$

запишемо (3.13) у вигляді:

$$\psi_i(F^h_{[j,k]} - q_k F^h_j + q_j F^h_k) + \psi_j(F^h_{i,k} - q_k F^h_i) - \psi_k(F^h_{i,j} - q_j F^h_i) = 0.$$

Опускаючи тут індекс h в V_n і симетруючи по h, k, знаходимо

$$\psi_k(F_{hi,j} - q_j F_{hi}) + \psi_h(F_{ki,j} - q_j F_{ki}) = 0.$$

Співставимо це рівняння з результатом його послідовного згортання з a^k, a^h по k, h відповідно і отримаємо:

$$F^h_{i,j} = q_j F^h_i.$$

Отже бачимо, що наша узагальнено-рекурентна структура F_i^h параболічного типу виявилася рекурентно-параболічною [15]. Тоді з огляду на градієнтність q_i в V_n існує параболічно келерова структура

$$\tilde{F}_i^h = e^{-q} F_i^h. \qquad \square$$

4. КГВ узагальнено-рекурентних просторів параболічного типу зі збереженням вектора узагальненої рекурентності на плоский простір

1°. Нехай узагальнено-рекурентний простір параболічного типу з інтегровною афінорною структурою (V_n, g_{ij}, F_i^h) допускає квазі-геодезичне відображення зі збереженням вектора узагальненої рекурентності на плоский простір $\overline{V}_n = E_n$. Отже $\overline{R}^h_{ijk} = 0$ і

$$\overline{R}^{\bar{h}}_{ijk} - \overline{R}^h_{\bar{i}jk} - \overline{R}^h_{i\bar{j}k} - \overline{R}^h_{ij\bar{k}} = 0.$$

Тоді у відповідності з Теоремою 2.4 вектор узагальненої рекурентності q_i простору $\overline{V}_n$ – градієнтний.

Оскільки за умовою наше КГВ зберігає вектор узагальненої рекурентності, а афінорна структура у нас вважається інтегровною, то за Теоремою 3.3 (V_n, g_{ij}, F_i^h) є рекурентно-параболічним простором.

Враховуючи ці обставини і спираючись на [15, Теорема 2], приходимо до висновку, що має місце

Теорема 4.1. *Якщо узагальнено-рекурентний простір параболічного типу (V_n, g_{ij}, F_i^h) з інтегровною афінорною структурою F_i^h допускає нетривіальне КГВ зі збереженням вектора узагальненої рекурентності q_i на плоский простір $\overline{V}_n = E_n$, то V_n буде Річчі-плоским, симетричним, тобто*

$$R_{ij} = 0,$$
$$R^h_{ijk,l} = 0,$$

вектор q_i – градієнтним,

$$q_i = \frac{\partial q(x)}{\partial x^i},$$

а тензор Рімана простору V_n необхідно має вигляд

$$R_{hijk} = Ce^{-2q(x)}\Big(F_{hk}F_{ij} - F_{hj}F_{ik} + 2F_{hi}F_{kj}\Big) \tag{4.1}$$

при деякій сталій C.

2°. В [15] для рекурентно-параболічного простору, тензор Рімана якого має структуру (4.1), отримано компоненти метричного тензора в околі деякої точки $M_\circ$ в V_n:

$$g_{ij}(y) = \overset{\circ}{g}_{ij} + \frac{Ce^{-2q^\circ}}{8} y^\alpha \overset{\circ}{F}_{\alpha i} y^\beta \overset{\circ}{F}_{\beta j}, \tag{4.2}$$

де $\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{F}_{ij}$, $\overset{\circ}{q}$ – компоненти тензорів g_{ij}, F_{ij} і функції q в точці $x_\circ$, y^h – ріманові координати з початком в точці $x_\circ$.

Отже спираючись на Теореми 3.3 і 4.1, робимо висновок, що справедлива

Теорема 4.2. *Якщо узагальнено-рекурентний простір параболічного типу* (V_n, g_{ij}, F_i^h) *з інтегровною афінорною структурою* F_i^h *допускає нетривіальне КГВ зі збереженням вектора узагальненої рекурентності* q_i *на плоский простір* $\overline{V}_n = E_n$*, то його метричний тензор в околі деякої точки* $M_\circ$ *в* V_n *може бути представлений у вигляді* (4.2).

5. Висновок

В статті введено поняття узагальнено-рекурентної афінорної структури на псевдорімановому просторі. До таких структур відносяться, наприклад келерові і K-структури. Почато дослідження квазі-геодезичних відображень псевдоріманових просторів параболічного типу. Розглянуто тільки такі відображення, які зберігають вектор узагальненої рекурентності, хоча найбільш інтересні і різноманітні результати слід очікувати якраз в протилежному випадку. Виявилося, що якщо псевдорімановий простір з інтегровною K-структурою допускає нетривіальне КГВ, то цей простір – параболічно-келеровий. В узагальнено-рекурентному просторі параболічного типу, який допускає нетривіальне КГВ на плоский простір, також існує параболічно-келерова структура, тому висновки останнього розділу статті цілком узгоджуються з результатами, які представлені в [9].

Література

[1] V. E. Berezovskii, J. Mikeš. Almost geodesic mappings of spaces with affine connection. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 207(3):389–409, 2015, doi: 10.1007/s10958-015-2378-5. Translated from Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Prilozh. Temat. Obz. Vol. 126, Geometry, 2013.

[2] V. E. Berezovskiĭ, Ĭ. Mikesh, G. Khuda, E. E. Chepurnaya. Canonical almost geodesic mappings that preserve the projective curvature tensor. *Russian Mathematics*, 61(6):1–5, 2017, doi: 10.3103/s1066369x17060019.

[3] Ryszard Deszcz, Mileva Prvanović. Holomorphically projective mappings onto semisymmetric anti-Kähler manifolds. *Tensor (N.S.)*, 75(1):9–28, 2014.

[4] V. Kiosak, A. Savchenko, T. Shevchenko. Holomorphically projective mappings of special kähler manifolds. AIP Conference Proceedings, 2018, doi: 10.1063/1.5064924.

[5] Josef Mikeš, Alena Vanžurová, Irena Hinterleitner. *Geodesic mappings and some generalizations*. Palacký University Olomouc, Faculty of Science, Olomouc, 2009.

[6] J. Mikeš, E. Stepanova, A. Vanžurová, S. Bácsó, V.E. Berezovski, O. Chepurna, M. Chodorová, H. Chudá, M.L. Gavrilchenko, M. Haddad. *Differential geometry of special mappings*. Palacký University Olomouc, Faculty of Science, Olomouc, 2015.

[7] Miloš Z. Petrović, Mića S. Stanković. Special almost geodesic mappings of the first type of non-symmetric affine connection spaces. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 40(3):1353–1362, 2017, doi: 10.1007/s40840-015-0118-0.

[8] P. Peška, J. Mikeš, H. Chudá, M. Shiha. On holomorphically projective mappings of parabolic Kähler manifolds. *Miskolc Math. Notes*, 17(2):1011–1019, 2016, doi: 10.18514/MMN.2017.1893.

[9] Mohsen Shiha, Josef Mikeš. On holomorphically projective flat parabolically-Kählerian spaces. 250:467–474, 2006.

[10] Mića S. Stanković, Milan L. Zlatanović, Nenad O. Vesić. Basic equations of G-almost geodesic mappings of the second type, which have the property of reciprocity. *Czechoslovak Math. J.*, 65(140)(3):787–799, 2015, doi: 10.1007/s10587-015-0208-z.

[11] Д. В. Беклемишев. *Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой*. Итоги науки: Геометрия, 1963. Москва: ВИНИТИ, 1965.

[12] И. Н. Курбатова. *Квази-геодезические отображения римановых пространств*. PhD thesis, 1980.

[13] И. Н. Курбатова. Канонические квази-геодезические отображения параболически кэлеровых пространств. *Proc. Intern. Geom. Center*, 7(1):53–64, 2014.

[14] И. Н. Курбатова. О закономерностях канонических квази-геодзических отображений параболически кэлеровых пространств. *Proc. Intern. Geom. Center*, 7(2):26–35, 2014.

[15] И. Н. Курбатова, О. Т. Сисюк. Квази-геодезические отображения рекуррентно-параболических пространств. *Proc. Intern. Geom. Center*, 8(1):74–83, 2014.

[16] А. З. Петров. Моделирование физических полей. *Гравитация и теория относительности*, (4-5):7–21, 1968.

[17] Н. С. Синюков. *Геодезические отображения римановых пространств*. М.: Наука, 1979.

[18] Н. С. Синюков. *Почти геодезические отображения аффинносвязных и римановых пространств*, volume 13 of *Итоги науки и техники: Проблемы геометрии*. Москва: ВИНИТИ, 1982.

Надійшла до редакції 1 серпня 2020, прийнята до друку 29 вересня 2020.

Курбатова І.М.
ОНУ, Одеса, Україна
Email: `irina.kurbatova27@gmail.com`

Піструіл М.І.
ОНУ, Одеса, Україна
Email: `margaret.pistruil@gmail.com`