Proceedings of the
International Geometry Center
Vol. 13, no. 1 (2020) pp. 9–22

Основні теореми теорії $2F$-планарних відображень псевдоріманових просторів з f-структурою

Курбатова І. М., Коновенко Н. Г.

Abstract. We study fundamental questions of the theory of $2F$-planar mappings of pseudo-Riemannian spaces equipped with a certain type of affinor structure. Earlier we proved that a pseudo-Riemannian space with a covariantly constant f-structure is a product of two pseudo-Riemannian spaces one of which is Kähler, and that the class of pseudo-Riemannian spaces with a covariantly constant f-structure is closed with respect to $2F$-planar mappings. Also, if the affinor is covariantly constan, then non-trivial $2F$-planar mappings can be of three types: full and canonical of types I and II. Moreover, depending on the type, each $2F$-planar mapping induces respectively a geodesic, holomorphically-projective or affine mapping on the components of the product of the corresponding spaces.

Geometric objects which are invariant under the above mappings are constructed and classes of spaces admitting $2F$-planar mapping onto a flat space are distinguished. We also compute their metrics in special coordinate systems.

Then the question arises of whether other classes of spaces which admit $2F$-planar mapping exist, and how to find them. In the present paper using the methods developed in the theory of geodesic mappings, we convert the fundamental equations of the main type $2F$-planar mappings of the pseudo-Riemannian spaces with a covariantly constant f-structure to the form that allows us to study them effectively. Using this new form we, in particular, show that pseudo-Riemannian space with a covariantly constant f-structure in which concircular or quasiconcircular vector field exists, admits a nontrivial $2F$-planar mapping of main type. We also prove fundamental theorems of theory of $2F$-planar mappings of pseudo-Riemannian spaces with a covariantly constant f-structure. These theorems supply us with a regular method that allows to decide effectively whether a space (V_n, g_{ij}, F_i^h) admits $2F$-planar mapping or not, and in the affirmative case, we are able to find all the spaces $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$ that can serve as images of V_n under the above mappings.

Ключові слова: f-структура, $2F$-планарне відображення
DOI: http://dx.doi.org/

Анотація. В статті вивчаються базові питання теорії $2F$-планарних відображень многовидів, які наділені афінорною структурою певного типу. Раніше ми довели, що псевдоріманoвий простір з абсолютно паралельною f-структурою є добутком двох псевдоріманових просторів, один з яких келеровий, а клас псевдоріманових просторів з абсолютно паралельною f-структурою є замкнутим відносно розглянутих відображень. Крім того, за умовою коваріантної сталості афінора f-структури у відображуваних просторах нетривіальні $2F$-планарні відображення можуть бути трьох типів: повні і канонічні типів I та II. Більш того, в залежності від типу, $2F$-планарне відображення індукує на компонентах добутку відображуваних просторів відповідно, геодезичне, голоморфо-проективне або афінне відображення.

Нами були побудовані геометричні об'єкти, інваріантні відносно розглянутих відображень всіх типів, виділено класи просторів, які допускають $2F$-планарне відображення на плоский простір, а також знайдено їх метрики в спеціальній системі координат.

Далі виникає закономірне питання про те, чи існують інші класи просторів, які допускають $2F$-планарні відображення, і як їх знайти. У цій статті, використовуючи методи, розроблені в теорії геодезичних відображень, ми зводимо основні рівняння $2F$-планарних відображень основного типу до виду, який допускає ефективне дослідження – це так звана нова форма основних рівнянь. Використовуючи цю нову форму, ми, зокрема, показали, що псевдоріманoвий простір з абсолютно паралельною f-структурою, в якому існує конциркулярне або квазіконциркулярне векторне поле, допускає нетривіальне $2F$-планарне відображення основного типу. Доведені теореми дають регулярний метод, що дозволяє для будь-якого псевдоріманового простору з абсолютно паралельною f-структурою (V_n, g_{ij}, F_i^h) або знайти всі простори $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$, на які V_n допускає $2F$-планарне відображення основного типу, або довести, що таких просторів немає.

1. Вступ

В роботах [5, 4] ми розглядали $2F$-планарні відображення ([1]) які є природним узагальненням геодезичних ([6]) відображень афіннозв'язних і ріманових просторів, а також голоморфно-проективних і F-планарних ([2]) відображень многовидів, що наділені афінорною структурою певного типу.

В [1] було введене поняття $2F$-планарного відображення ($2F$ПВ) афіннозв'язних і ріманових просторів і показано, що $2F$ПВ між просторами (V_n, g_{ij}, F_i^h), $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$ з метричними тензорами $g_{ij}, \overline{g}_{ij}$ і афінорними структурами $F_i^h, \overline{F}_i^h$, відповідно, необхідно зберігає структуру. Іншими словами, в загальній за відображенням системі координат (x^i) має місце

$$F_i^h(x) = \overline{F}_i^h(x), \quad h, i = 1, 2, \ldots, n.$$

В [1] також вивчалися $2F$ПВ псевдоріманових просторів зі структурою виду $F^h_\alpha F^\alpha_\beta F^\beta_i = \delta^h_i$.

Продовжуючи дослідження $2F$ПВ в [5], ми з'ясували, що псевдорімановий простір з абсолютно паралельною f-структурою є добутком двох просторів, один з яких – келеровий, а також, що клас псевдоріманових просторів з абсолютно паралельною f-структурою замкнутий відносно розглянутих відображень. Також було показано, що за умови коваріантної сталості f-структури, нетривіальні $2F$-планарні відображення можуть бути трьох типів: повні і канонічні I, II типу. В [5] доведено, що $2F$ПВ в залежності від типу індукує на компонентах добутку, які представляють простори, що відображуються, геодезичне [6], голоморфно-проективне [2] або афінне [6] відображення.

В [4] ми побудували геометричні об'єкти, інваріантні щодо розглянутих відображень, виділили класи псевдоріманових просторів з абсолютно паралельною f-структурою, що допускають $2F$ПВ (основного типу і канонічні) на плоский простір, і отримали їх метрики в спеціальній системі координат.

Дослідження ведеться в тензорній формі, локально, в класі дійсних досить гладких, а в загальному випадку аналітичних функцій.

2. $2F$-планарні відображення псевдоріманових просторів з абсолютно паралельною f-структурою і їх особливості

2.1. Розглянемо псевдоріманові простори (V_n, g_{ij}, F^h_i) і $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}^h_i)$, на яких задані афінорні структури. $2F$-планарне відображення V_n на $\overline{V}_n$ в загальній за відображенням системі координат (x^i) характеризується основними рівняннями [1]:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_{(i}\delta^h_{j)} + \phi_{(i}\overset{1}{F}{}^h_{j)} + \sigma_{(i}\overset{2}{F}{}^h_{j)}, \tag{2.1}$$

$$F^h_i(x) = \overline{F}^h_i(x), \tag{2.2}$$

де $\Gamma^h_{ij}, \overline{\Gamma}^h_{ij}$ – компоненти об'єктів зв'язності V_n та $\overline{V}_n$, $\psi_i(x), \phi_i(x), \sigma_i(x)$ – деякі ковектори, а дужками позначена операція симетрування. $2F$ПВ вважається тривіальним, коли $\psi_i = \phi_i = \sigma_i = 0$.

Тут позначено

$$\overset{1}{F}{}^h_i = F^h_i, \quad \overset{2}{F}{}^h_i = F^h_\alpha F^\alpha_i.$$

Будемо вважати, що афінор F^h_i визначає на (V_n, g_{ij}, F^h_i) *f-структуру*, [3, 7], тобто мають місце такі умови

$$\begin{gathered} F^h_\alpha F^\alpha_\beta F^\beta_i + F^h_i = 0, \quad i, h, \alpha, \beta, \ldots = 1, 2, \ldots, n, \\ Rg\|F^h_i\| = 2k \quad (2k < n). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Якщо при цьому афінорна структура узгоджена з метрикою V_n і $\overline{V}_n$ у вигляді

$$\overset{1}{F}_{ij} + \overset{1}{F}_{ji} = 0, \qquad \overset{1}{\overline{F}}_{ij} + \overset{1}{\overline{F}}_{ji} = 0,$$
$$\overset{1}{F}_{ij} = g_{i\alpha}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{j}, \qquad \overset{1}{\overline{F}}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{j}, \tag{2.4}$$

та абсолютно паралельна в V_n, тобто

$$\overset{1}{F}{}^{h}_{i,j} = 0, \tag{2.5}$$

то, як показано в [5], маємо, що

$$\overset{1}{F}{}^{h}_{i|j} = 0, \tag{2.6}$$

де "," и "|" - знаки коваріантної похідної в V_n і $\overline{V}_n$.

В [5] ми з'ясували, що за умов (2.3)-(2.6) між векторами ψ_i, ϕ_i, σ_i в основних рівняннях (2.1) існує залежність

$$\psi_\alpha \overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i} = 0, \qquad \sigma_i = \psi_i - \phi_\alpha \overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}, \qquad \phi_i = \sigma_\alpha \overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}, \tag{2.7}$$

а також, що умова $\sigma_i = 0$ тягне за собою $\psi_i = \phi_i = 0$, тобто в цьому випадку $2F$ПВ тривіальне. Тому для нетривіальних $2F$-планарних відображень (V_n, g_{ij}, F^h_i) на $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}^h_i)$ з основними рівняннями (2.1) має місце один з варіантів:

$$\begin{array}{rlll} I: & \psi_i = 0, & \phi_i \neq 0, & \sigma_i \neq 0, \\ II: & \psi_i \neq 0, & \phi_i = 0, & \sigma_i \neq 0, \\ III: & \psi_i \neq 0, & \phi_i \neq 0, & \sigma_i \neq 0. \end{array}$$

Ми називаємо $2F$-планарне відображення *канонічним I(II) типу* і позначаємо $2F$ПВ(I), $2F$ПВ(II) у випадках I,II і $2F$ПВ *основного типу* в разі III.

У цій статті ми розглядаємо тільки $2F$ПВ основного типу.

2.2. Домовимося надалі операцію згортання з афінором позначати наступним чином:

$$A^{\cdots}_{\bar{i}\ldots} = A^{\cdots}_{\alpha\ldots}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{i}, \qquad A^{\bar{i}\ldots}_{\cdots} = A^{\alpha\ldots}_{\cdots}\overset{1}{F}{}^{i}_{\alpha},$$
$$A^{\cdots}_{\bar{\bar{i}}\ldots} = A^{\cdots}_{\alpha\ldots}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{i}, \qquad A^{\bar{\bar{i}}\ldots}_{\cdots} = A^{\alpha\ldots}_{\cdots}\overset{2}{F}{}^{i}_{\alpha}.$$

3. Нова форма основних рівнянь $2F$-планарних відображень основного типу

1°. Псевдоріманові простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) з абсолютно паралельною f-структурою допускає нетривіальне $2F$ПВ основного типу на простір $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$ тоді і тільки тоді, коли в загальній за відображенням системі координат (x^i) виконуються основні рівняння розглянутих відображень. Іншими словами, за умов (2.3)-(2.5) в (V_n, g_{ij}, F_i^h) має розв'язок система нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку (2.1), (2.2) відносно компонент тензора $\overline{g}_{ij}(x)$ і векторів $\psi_i(x) \neq 0$, $\phi_i(x) \neq 0$, $\sigma_i(x) \neq 0$.

Сучасна теорія диференціальних рівнянь не дає регулярних методів для дослідження умов існування та єдиності розв'язків цієї системи.

Використовуючи методи, розроблені в теорії геодезичних відображень ріманових просторів, [6], ми зведемо основні рівняння $2F$ПВ (2.1)-(2.5) до виду, який допускає ефективне дослідження.

2°. В [4] ми з'ясували, що вектори $\psi_i, \phi_{\bar{i}}, \sigma_i$ в (2.1) градієнтні, тобто існують інваріанти $\psi(x), \overline{\phi}(x), \sigma(x)$ такі, що

$$\psi_i = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^i}, \qquad \phi_{\bar{i}} = \frac{\partial \overline{\phi}(x)}{\partial x^i}, \qquad \sigma_i = \frac{\partial \sigma(x)}{\partial x^i}. \tag{3.1}$$

Далі, рівняння (2.1) можна записати в еквівалентній формі:

$$\overline{g}_{ij,k} = 2\psi_k \overline{g}_{ij} + \psi_{(i}\overline{g}_{j)k} + \phi_{(i}\overset{1}{\overline{F}}_{j)k} + 2\sigma_k \overset{2}{\overline{F}}_{ij} + \sigma_{(i}\overset{2}{\overline{F}}_{j)k}, \tag{3.2}$$

де

$$\overset{1}{\overline{F}}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{j}, \qquad \overset{2}{\overline{F}}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{j},$$

причому

$$\overset{2}{\overline{F}}_{ij} = \overset{2}{\overline{F}}_{ji}. \tag{3.3}$$

Введемо до розгляду невироджений тензор

$$\tilde{g}_{ij} = \overline{g}_{i\alpha}\left(a\delta^{\alpha}_{j} + c\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{j}\right), \tag{3.4}$$

де a, c – деякі інваріанти.

Після коваріантного диференціювання (3.4) в V_n та урахування умов (3.2), отримуємо:

$$\tilde{g}_{ij,k} = \psi_{(i}\tilde{g}_{j)k} + \phi_{(i}\overset{1}{\tilde{F}}_{j)k} + \sigma_{(i}\overset{2}{\tilde{F}}_{j)k} + T_{ijk}, \tag{3.5}$$

де

$$\overset{1}{\tilde{F}}_{ij} = \tilde{g}_{i\alpha}\overset{1}{F}{}^{\alpha}_{j}, \qquad \overset{2}{\tilde{F}}_{ij} = \tilde{g}_{i\alpha}\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{j},$$

$$T_{ijk} = \overline{g}_{ij}\big(a_{,k} + 2a\psi_k\big) + \overset{2}{\overline{F}}_{ij}(c_{,k} + 2(a-c)\sigma_k + 2c\psi_k).$$

Підберемо інваріанти a і c таким чином, щоб $T_{ijk} = 0$, тобто

$$\overline{g}_{ij}(a_{,k} + 2a\psi_k) + \overset{2}{\overline{F}}_{ij}\big(c_{,k} + 2(a-c)\sigma_k + 2c\psi_k\big) = 0. \tag{3.6}$$

Згортаючи отримані співвідношення з $\overset{2}{F}{}^{j}_{k}$ за індексом j і порівнюючи результат з вихідною рівністю, приходимо до висновку, що (3.6) еквівалентні системі диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку

$$a_{,k} + 2a\psi_k = 0,$$
$$c_{,k} + 2(a-c)\sigma_k + 2c\psi_k = 0.$$

Ця система цілком інтегровна, а її загальний розв'язок з урахуванням (3.1) має вигляд

$$a = C_1 e^{-2\psi}, \qquad c = e^{-2\psi}(C_1 + C_2 e^{2\sigma}).$$

Нас влаштує будь-який частковий розв'язок, при якому

$$\tilde{g}_{ij}(x) \neq a\overline{g}_{ij}(x), \qquad \det \|\tilde{g}_{ij}\| \neq 0,$$

а тому виберемо $C_1 = C_2 = 1$ наступним чином:

$$\tilde{g}_{ij} = e^{-2\psi}\overline{g}_{i\alpha}\Big(\delta^{\alpha}_{j} + (1 + e^{2\sigma})\overset{2}{F}{}^{\alpha}_{j}\Big). \tag{3.7}$$

Тоді матриця $(\tilde{g}_{ij})$ буде невиродженою, і легко перевірити, що тензор

$$\tilde{g}^{ij} = e^{2\psi}\overline{g}^{i\alpha}\Big(\delta^{j}_{\alpha} + (1 + e^{-2\sigma})\overset{2}{F}{}^{j}_{\alpha}\Big) \tag{3.8}$$

задовольняє умову

$$\tilde{g}_{i\alpha}\tilde{g}^{\alpha j} = \delta^{j}_{i}.$$

Диференціюючи цю тотожність коваріантно в V_n:

$$\tilde{g}_{i\alpha,k}\tilde{g}^{\alpha j} + \tilde{g}_{i\alpha}\tilde{g}^{\alpha j}_{,k} = 0$$

знаходимо, що

$$\tilde{g}^{ij}_{,k} = -\tilde{g}_{\alpha\beta,k}\tilde{g}^{\alpha i}\tilde{g}^{\beta j},$$

і, відповідно до (3.5) та (3.6),

$$a_{ij,k} = \overset{1}{\lambda}_{(i}g_{j)k} + \overset{2}{\lambda}_{(i}\overset{1}{F}_{j)k} + \overset{3}{\lambda}_{(i}\overset{2}{F}_{j)k}, \tag{3.9}$$

де

$$a_{ij} = \tilde{g}^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \tag{3.10}$$

$$\overset{1}{\lambda}_i = -\psi_\alpha \tilde{g}^{\alpha\beta} g_{\beta j}, \qquad \overset{2}{\lambda}_i = -\phi_\alpha \tilde{g}^{\alpha\beta} g_{\beta j}, \qquad \overset{3}{\lambda}_i = -\sigma_\alpha \tilde{g}^{\alpha\beta} g_{\beta j}. \tag{3.11}$$

З огляду на (2.7) вектори $\overset{1}{\lambda}_i$, $\overset{2}{\lambda}_i$, $\overset{3}{\lambda}_i$ зв'язані співвідношеннями

$$\overset{1}{\lambda}_{\bar{i}} = 0, \qquad \overset{3}{\lambda}_{\bar{i}} = \overset{2}{\lambda}_i, \qquad \overset{3}{\lambda}_i = \overset{1}{\lambda}_i - \overset{2}{\lambda}_{\bar{i}}. \tag{3.12}$$

З (2.4) і (3.10) випливає, що тензор a_{ij} задовольняє умови

$$a_{i\alpha} \overset{1}{F}{}^\alpha_j = -a_{j\alpha} \overset{1}{F}{}^\alpha_i, \qquad \det \|a_{ij}\| \neq 0. \tag{3.13}$$

При згортанні (3.9) по черзі з g^{ij} і $\overset{2}{F}{}^{ij}$ за індексами i, j з урахуванням (3.12), з'ясовується, що вектори $\overset{1}{\lambda}_i$, $\overset{2}{\lambda}_{\bar{i}}$ і $\overset{3}{\lambda}_i$ градієнтні, оскільки

$$a_{\alpha\beta,k} g^{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta})_{,k} = 2\overset{1}{\lambda}_k - 4\overset{2}{\lambda}_{\bar{k}},$$
$$a_{\alpha\beta,k} \overset{2}{F}{}^{\alpha\beta} = (a_{\alpha\beta} \overset{2}{F}{}^{\alpha\beta})_{,k} = -4\overset{2}{\lambda}_{\bar{k}}.$$

Отже, якщо псевдорімановий простір (V_n, g_{ij}, F_i^h) з абсолютно паралельною f-структурою допускає нетривіальне $2F$ПВ основного типу на простір $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}{}_i^h)$, тобто в ньому виконуються (3.2), (2.3), (2.4), (2.5), то в ньому необхідно існує неособливий симетричний тензор a_{ij}, який задовольняє (3.9) і (3.13) при деяких ненульових векторах $\overset{1}{\lambda}_i$, $\overset{2}{\lambda}_i$ і $\overset{3}{\lambda}_i$.

Вірно і зворотне твердження. Дійсно, якщо a_{ij} і $\overset{1}{\lambda}_i$, $\overset{2}{\lambda}_i$, $\overset{3}{\lambda}_i$ задовольняють рівняння (3.12) і (3.13), то для

$$\tilde{g}_{ij} = a^{\alpha\beta} g_{\alpha i} g_{\beta j}, \qquad a_{i\alpha} a^{\alpha j} = \delta_i^j$$

мають місце (3.5) при $T_{ij} = 0$ і

$$\psi_i = -\overset{1}{\lambda}_\beta g^{\beta\alpha} \tilde{g}_{\alpha i}, \qquad \phi_i = -\overset{2}{\lambda}_\beta g^{\beta\alpha} \tilde{g}_{\alpha i}, \qquad \sigma_i = -\overset{3}{\lambda}_\beta g^{\beta\alpha} \tilde{g}_{\alpha i}.$$

Нехай $\tilde{\Gamma}^h_{ij}$ – символи Крістофеля II роду, виведені з тензора $\tilde{g}_{ij}$. Враховуючи що

$$2\tilde{\Gamma}^\alpha_{i\alpha} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{g}_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = \tilde{g}^{\alpha\beta} (\tilde{g}_{\alpha\beta,i} + 2\tilde{g}_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\beta i}),$$

та з огляду на (3.5) та (2.7), знаходимо,

$$3\psi_i - 2\sigma_i = \tilde{\Gamma}^\alpha_{i\alpha} - \Gamma^\alpha_{i\alpha} \tag{3.14}$$

що говорить про градієнтність вектора $3\psi_i - 2\sigma_i$.

Далі, для тензора

$$\tilde{\tilde{g}}_{ij} = \tilde{g}_{ij} - \tilde{g}_{i\bar{\bar{j}}}$$

на підставі (3.5), (2.7), (2.3), (2.4) маємо, що

$$\tilde{\tilde{g}}_{ij,k} = \psi_{(i}\tilde{\tilde{g}}_{j)k}. \tag{3.15}$$

Зауважимо, що тензор $\tilde{\tilde{g}}_{ij}$ є неособливим, тому що існує

$$\tilde{\tilde{g}}^{ij} = \tilde{g}^{ij} + \frac{1}{2}\tilde{g}^{i\bar{\bar{j}}}, \qquad \tilde{\tilde{g}}_{i\alpha}\tilde{\tilde{g}}^{\alpha j} = \delta_i^j.$$

Тому для символів Крістофеля II роду, які виведені з $\tilde{\tilde{g}}_{ij}$, також виконуватиметься тотожність:

$$2\tilde{\tilde{\Gamma}}_{i\alpha}^{\alpha} = \tilde{\tilde{g}}^{\alpha\beta}\frac{\partial\tilde{\tilde{g}}_{\alpha\beta}}{\partial x^i} = \tilde{\tilde{g}}^{\alpha\beta}(\tilde{\tilde{g}}_{\alpha\beta,i} + 2\tilde{\tilde{g}}_{\alpha\gamma}\Gamma_{\beta i}^{\gamma}),$$

а отже, з огляду на (3.15),

$$2\psi_i = \tilde{\tilde{\Gamma}}_{i\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{i\alpha}^{\alpha}.$$

Звідси та з (3.14) випливає градієнтність ψ_i і σ_i, тобто мають місце співвідношення (3.1). Але тоді для тензора

$$\overline{g}_{ij} = e^{2\psi}\tilde{g}_{i\alpha}\Big(\delta_j^{\alpha} + (1 + e^{-2\sigma})\overset{2}{F}{}_j^{\alpha}\Big)$$

з (3.7) і (3.5) випливають умови (3.2). Очевидно, $\overline{g}_{ij}$ є метричним тензором псевдоріманового простору з абсолютно паралельною f-структурою $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}{}_j^h)$. Тим самим доведена

Теорема 3.1. *Для того, щоб псевдоріманoвий простір з абсолютно паралельною f-структурою (V_n, g_{ij}, F_j^h) допускав $2F\Pi B$ основного типу, необхідно і достатньо, щоб в цьому просторі існував неособливий, симетричний, двічі коваріантний тензор a_{ij}, який задовольняє рівняння* (3.9), (3.13) *при деяких векторах*

$$\overset{1}{\lambda}_i \neq 0, \quad \overset{2}{\lambda}_i \neq 0, \quad \overset{3}{\lambda}_i \neq 0,$$

пов'язаних співвідношеннями (3.12).

Рівняння (3.9) є новою формою основних рівнянь теорії $2F$-планарних відображень основного типу просторів з f-структурою.

3°**.** З доведеної теореми отримуємо корисний наслідок. Перш ніж його сформулювати, нагадаємо, що рімановий простір (V_n, g_{ij}) називають *еквідистантним*, [6], якщо в ньому існує векторне поле $\xi_i \neq 0$, яке задовольняє рівняння

$$\xi_{i,j} = \rho g_{ij}. \tag{3.16}$$

Такі векторні поля називаються *конциркулярними* [6]. Кажуть, що еквідистантний простір належить до *основного типу* при $\rho \neq 0$ і до *особливого* при $\rho = 0$.

Наслідок 3.2. *Кожний псевдорімановий простір з абсолютно паралельною f-структурою (V_n, g_{ij}, F^i_j), в якому існує конциркулярне векторне поле ξ_i, яке не є еквідистантним особливого типу, допускає нетривіальне $2F$ПВ за умови, що $\xi_{\bar{\bar{i}}} \neq 0$.*

Дійсно, нехай в (V_n, g_{ij}, F^h_j) існує векторне поле ξ_i, що задовольняє (3.16) і $\xi_{\bar{\bar{i}}} \neq 0$. Тоді для тензора

$$a_{ij} = C_1 g_{ij} + C_2 \overset{2}{F}_{ij} + C_3(\xi_i + \xi_{\bar{\bar{i}}})(\xi_j + \xi_{\bar{\bar{j}}}) + C_4(\xi_{\bar{i}}\xi_{\bar{j}} + \xi_{\bar{\bar{i}}}\xi_{\bar{\bar{j}}})$$

при таких сталих $C_1, C_2, C_3 \neq 0, C_4 \neq 0$, що a_{ij} буде неособливим, маємо, що:

$$a_{ij,k} = \overset{1}{\lambda}_{(i} g_{j)k} + \overset{2}{\lambda}_{(i} \overset{1}{F}_{j)k} + \overset{3}{\lambda}_{(i} \overset{2}{F}_{j)k},$$

де

$$\overset{1}{\lambda}_i = C_3\rho(\xi_i + \xi_{\bar{\bar{i}}}), \qquad \overset{2}{\lambda}_i = -C_4\rho\xi_{\bar{i}}, \qquad \overset{3}{\lambda}_i = C_3\rho((\xi_i + \xi_{\bar{\bar{i}}}) + C_4\xi_{\bar{\bar{i}}}).$$

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що для a_{ij} і $\overset{1}{\lambda}_i \neq 0$, $\overset{2}{\lambda}_i \neq 0$, $\overset{3}{\lambda}_i \neq 0$ виконуються властивості (3.13) і (3.12), отже за Теоремою 3.1 (V_n, g_{ij}, F^i_j) допускає $2F$ПВ основного типу.

4°**.** Узагальнимо поняття конциркулярного векторного поля. Для цього введемо до розгляду векторні поля, що задовольняють умови

$$\zeta_{i,j} = \rho_1 g_{ij} + \rho_2 \overset{2}{F}_{ij} \tag{3.17}$$

і назвемо їх *квазіконциркулярними*.

Наслідок 3.3. *Кожний псевдорімановий простір з абсолютно паралельною f-структурою (V_n, g_{ij}, F^i_j), в якому існує квазіконциркулярне векторне поле ζ_i, допускає $2F$ПВ основного типу за умов*

$$\rho_1 \neq \rho_2, \qquad \rho_1 \neq 0, \qquad \rho_2 \neq 0, \qquad \zeta_{\bar{\bar{i}}} \neq 0. \tag{3.18}$$

Нехай в (V_n, g_{ij}, F_j^h) існує векторне поле ζ_i, яке задовольняє (3.17) і (3.18). Тоді в точності повторюючи міркування, які було використано при доведенні наслідку 3.2, для

$$a_{ij} = C_1 g_{ij} + C_2 \overset{2}{F}_{ij} + C_3(\zeta_i + \zeta_{\bar{\bar{i}}})(\zeta_j + \zeta_{\bar{\bar{j}}}) + \frac{C_4 \rho_1^2}{(\rho_1 - \rho_2)^2}(\zeta_{\bar{i}}\zeta_{\bar{j}} + \zeta_{\bar{\bar{i}}}\zeta_{\bar{\bar{j}}})$$

та

$$\overset{1}{\lambda}_i = C_3 \rho_1(\zeta_i + \zeta_{\bar{\bar{i}}}), \qquad \overset{2}{\lambda}_i = -\frac{C_4 \rho_1^2}{\rho_1 - \rho_2}\zeta_{\bar{i}},$$
$$\overset{3}{\lambda}_i = C_3 \rho_1(\zeta_i + \zeta_{\bar{\bar{i}}}) + \frac{C_4 \rho_1^2}{\rho_1 - \rho_2}\zeta_{\bar{\bar{i}}},$$

приходимо до висновку, що наслідок 3.3 вірний.

4. Основні теореми теорії $2F$-планарних відображень псевдоріманових просторів з абсолютно паралельно f-структурою

1°**.** Нехай задано пседоріманової простір з абсолютно паралельною f-структурою (V_n, g_{ij}, F_i^h), тобто відомо його метричний тензор $g_{ij}(x)$ і афінор f-структури $F_i^h(x)$. Питання про існування $2F$-планарних відображень простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) зводиться до дослідження рівнянь (3.9) відносно тензора a_{ij} і векторів $\overset{1}{\lambda}_i \neq 0$, $\overset{2}{\lambda}_i \neq 0$, $\overset{3}{\lambda}_i \neq 0$, які задовольняють умови (3.12), (3.13).

Для вивчення цього питання дослідимо умови інтегровності рівнянь (3.9). З урахуванням тотожності Річчі вони мають вигляд:

$$a_{\alpha(j} R^\alpha_{i)kl} = Q_{(ij)[kl]}, \tag{4.1}$$

де

$$Q_{ijkl} = \overset{1}{\lambda}_{i,l} g_{jk} + \overset{2}{\lambda}_{i,l} \overset{1}{F}_{jk} + \overset{3}{\lambda}_{i,l} \overset{2}{F}_{jk},$$

а квадратними дужками позначено операцію альтернування за відповідними індексами.

Звідси за допомогою алгебраїчних перетворень знаходимо

$$(n - 2k)\overset{1}{\lambda}_{i,l} = \mu(g_{il} + \overset{2}{F}_{il}) + (a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{.i.\gamma} + a_{i\alpha} R^\alpha_\gamma)(\delta^\gamma_l + \overset{2}{F}{}^\gamma_l), \tag{4.2}$$

$$2k\overset{2}{\lambda}_{i,l} = \nu \overset{1}{F}_{il} + (a_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}_{.i.\gamma} + a_{i\alpha} R^\alpha_\gamma)\overset{1}{F}{}^\gamma_l. \tag{4.3}$$

Диференціальні умови на $\overset{3}{\lambda}_i$ легко випливають з (3.12), (4.2) та (4.3). Як бачимо, в рівняннях (4.2) і (4.3) з'явились нові невідомі інваріанти μ, ν, на які також потрібно знайти диференціальні умови. Для їх пошуку запишемо умови інтегровності останніх двох рівнянь:

$$(n-2k+3)\overset{1}{\lambda}_\alpha R^\alpha_{ilk} = \Big(\mu_{,[k} - \overset{1}{\lambda}_\alpha R^\alpha_{[k}\Big)\Big(g_{l]i} + \overset{2}{F}_{l]i}\Big) - \\ - a_{\alpha\beta}\Big(R^{\alpha}_{ik\gamma,\cdot}{}^{\beta} + \delta^\beta_i R^{\alpha\delta}_{\cdot\cdot k\gamma,\delta}\Big)\Big(\delta^\gamma_l + \overset{2}{F}{}^\gamma_l\Big), \tag{4.4}$$

$$2(k+1)\overset{2}{\lambda}_\alpha R^\alpha_{ilk} = \Big(\nu_{,[l} - \overset{2}{\lambda}_{\overline{\alpha}} R^\alpha_{[l}\Big)\overset{1}{F}_{k]i} + \overset{2}{\lambda}_\alpha R^\alpha_{[l}\overset{2}{F}_{k]i} + 2\overset{2}{\lambda}_{\overline{i}} R_{\overline{l}k} - \\ - a_{\alpha\beta}\Big(R^{\alpha}_{\overline{i}lk,\cdot}{}^{\beta} + \overset{1}{F}{}^\beta_i R^{\alpha\delta}_{\cdot\cdot lk,\delta}\Big). \tag{4.5}$$

Звідси певними алгебраїчними перетвореннями знаходимо:

$$(n-2k-1)\mu_{,k} = 2\overset{1}{\lambda}_\alpha R^\alpha_k, \tag{4.6}$$

$$\nu_{,k} = 2\overset{2}{\lambda}_\alpha R^\alpha_{\overline{k}.} \tag{4.7}$$

Співвідношення (3.9), (4.2), (4.3), (4.6), (4.7), які позначимо (A), утворюють замкнену систему диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку типу Коші відносно шуканих функцій a_{ij}, $\overset{1}{\lambda}_i$, $\overset{2}{\lambda}_i$, μ, ν. У теорії диференціальних рівнянь для таких систем розроблені регулярні методи. Таким чином нами доведена

Теорема 4.1. *Для того, щоб псевдорімановий простір з абсолютно паралельною f-структурою $(V_n, g_{ij}(x), F^h_i(x))$ допускав $2F$-планарне відображення основного типу, необхідно і достатньо, щоб система диференціальних рівнянь (A) мала нетривіальний розв'язок*

$$a_{ij}(x), \qquad \overset{1}{\lambda}_i(x) \neq 0, \qquad \overset{2}{\lambda}_i(x) \neq 0, \qquad \mu(x), \qquad \nu(x),$$

який задовольняє умови (3.13), *де* $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ *і* $\det\|a_{ij}(x)\| \neq 0$.

2°. З теорії диференціальних рівнянь відомо, що система (A) має не більше одного розв'язку для кожного набору початкових значень Коші

$$a_{ij}(x_\circ) = \underset{\circ}{a}_{ij}, \quad \overset{1}{\lambda}_i(x_\circ) = \underset{\circ}{\overset{1}{\lambda}}_i, \quad \overset{2}{\lambda}_i(x_\circ) = \underset{\circ}{\overset{2}{\lambda}}_i, \quad \mu(x_\circ) = \underset{\circ}{\mu}, \quad \nu(x_\circ) = \underset{\circ}{\nu},$$

тому кількість довільних сталих в загальному розв'язку рівнянь (A) обмежена. Зауважимо, що ця система не завжди сумісна і існування у неї нетривіальних розв'язків залежить від того, чи буде сумісною сукупність умов інтегровності (A) і їх диференціальних продовжень.

Умови інтегровності (3.9) виходять з (4.1) після заміни в них похідних від векторів $\overset{1}{\lambda}_i$, $\overset{2}{\lambda}_i$ виразами (4.2), (4.3) у вигляді:

$$a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}_{ijkl}=0, \tag{4.8}$$

де

$$\begin{aligned}
T^{\alpha\beta}_{ijkl}&=2k(n-2k)\Big(\delta^{\beta}_{j}R^{\alpha}_{.ikl}+\delta^{\beta}_{i}R^{\alpha}_{.jkl}\Big)+\overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}_{(ij)[kl]},\\
\overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}_{ijkl}&=\Big(R^{\alpha\ \ \beta}_{.i\gamma.}-R^{\alpha}_{\gamma}\delta^{\beta}_{i}\Big)\Big(2k(\delta^{\gamma}_{l}+\overset{2}{F}{}^{\gamma}_{l})g_{jk}+\\
&\qquad\qquad+(n-2k)\overset{1}{F}{}^{\gamma}_{l}\overset{1}{F}_{jk}+(2k\delta^{\gamma}_{l}+n\overset{2}{F}{}^{\gamma}_{l})\overset{2}{F}_{jk}\Big).
\end{aligned}$$

Умови інтегровності (4.2) і (4.3) ми отримаємо з (4.4) та (4.5) після заміни в них похідних від μ і ν виразами (4.6) і (4.7) у вигляді:

$$a_{\alpha\beta}P^{\alpha\beta}_{ilk}+(n-2k+3)(n-2k-1)\overset{1}{\lambda}_{\alpha}\Big(\tilde{Q}^{\alpha}_{ilk}+\tilde{Q}^{\alpha}_{il\bar{\bar{k}}}\Big)=0, \tag{4.9}$$

$$a_{\alpha\beta}L^{\alpha\beta}_{ilk}+2(k+1)\overset{2}{\lambda}_{\alpha}\tilde{Q}^{\alpha}_{il\bar{\bar{k}}}=0, \tag{4.10}$$

де

$$\begin{aligned}
P^{\alpha\beta}_{ilk}&=\Big(R^{\alpha\ \ \ \ \beta}_{ik\gamma,.}+\delta^{\beta}_{i}R^{\alpha\delta}_{..k\gamma,\delta}\Big)\Big(\delta^{\gamma}_{l}+\overset{2}{F}{}^{\gamma}_{l}\Big)\\
L^{\alpha\beta}_{ilk}&=R^{\alpha\ \ \ \ \beta}_{\bar{\bar{i}}lk,.}+\overset{1}{F}{}^{\beta}_{i}R^{\alpha\delta}_{..lk,\delta},\\
\tilde{Q}^{\alpha}_{ilk}&=g^{\alpha\beta}g_{i\gamma}Q^{\gamma}_{\beta lk},\\
Q^{h}_{ilk}&=R^{h}_{ilk}-\tfrac{1}{n-2k-1}\Big((\delta^{h}_{k}+\overset{2}{F}{}^{h}_{k})(R_{il}+R_{\bar{\bar{i}}l})-(\delta^{h}_{l}+\overset{2}{F}{}^{h}_{l})(R_{ik}+R_{\bar{\bar{i}}k})\Big)-\\
&\quad-\tfrac{1}{2(k+1)}\Big(\overset{1}{F}{}^{h}_{k}R_{i\bar{l}}-\overset{1}{F}{}^{h}_{l}R_{i\bar{k}}+2\overset{1}{F}{}^{h}_{i}R_{k\bar{l}}+\overset{2}{F}{}^{h}_{k}R_{i\bar{\bar{l}}}-\overset{2}{F}{}^{h}_{l}R_{i\bar{\bar{k}}}\Big),
\end{aligned} \tag{4.11}$$

$$n-2k-1\neq 0,\qquad k=\frac{1}{2}Rg\|F^{h}_{i}\|\neq 1.$$

Зауважимо, що тензор (4.11) інваріантний щодо $2F$ПВ основного типу. Його було знайдено в [4].

Нарешті, умови інтегровності рівнянь (4.6), (4.7) мають вигляд:

$$a_{\alpha\beta}\Big(R^{\alpha\ \ \beta}_{.\delta\gamma.}-\delta^{\beta}_{\gamma}R^{\alpha}_{\delta}\Big)R^{\delta}_{[l}\Big(\delta^{\gamma}_{k]}+\overset{2}{F}{}^{\gamma}_{k]})\Big)+(n-2k)\overset{1}{\lambda}_{\alpha}R^{\alpha}_{[k,l]}=0, \tag{4.12}$$

$$a_{\alpha\beta}\Big(R^{\alpha\ \ \ \beta}_{.\gamma[l.}-\delta^{\beta}_{\gamma}R^{\alpha}_{[l}\Big)R^{\bar{\gamma}}_{k]}+2k\overset{2}{\lambda}_{\alpha}R^{\alpha}_{[k,l]}=0. \tag{4.13}$$

Позначимо умови інтегровності системи (A), які представлені нами у формі (4.8), (4.9), (4.11)-(4.13) через (B), а їх диференціальні продовження через $(B_1), (B_2), (B_3), \ldots$ Як бачимо, $(B), (B_1), (B_2), (B_3), \ldots$ є системою лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно a_{ij}, $\overset{1}{\lambda}_i$, $\overset{2}{\lambda}_i$ із коефіцієнтами з V_n. Оскільки кількість невідомих функцій обмежена, то знайдеться таке натуральне число s, що (B_s) та наступні продовження будуть наслідками $(B), (B_1), (B_2), (B_3), \ldots, (B_{s-1})$. Згідно аналітичної теорії диференціальних рівнянь для системи (A) існує нетривіальний розв'язок в околі точки $M_\circ$ тоді і тільки тоді, коли рівняння $(B), (B_1), (B_2), (B_3), \ldots, (B_{s-1})$ мають в цій точці нетривіальний розв'язок. Таким чином, справедлива

Теорема 4.2. *Для того, щоб псевдоріманoвий простір з абсолютно паралельною f-структурою $(V_n, g_{ij}(x), F_i^h(x))$ допускало $2F$-планарне відображення основного типу, необхідно і достатньо, щоб система однорідних алгебраїчних рівнянь $(B), (B_1), (B_2), (B_3), \ldots, (B_{s-1})$ мала в (V_n, g_{ij}, F_i^h) нетривіальний розв'язок*

$$a_{ij}(x), \qquad \overset{1}{\lambda}_i(x) \neq 0, \qquad \overset{2}{\lambda}_i(x) \neq 0, \qquad \mu(x), \qquad \nu(x),$$

який задовольняє умови (3.13), *де* $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ *і* $\det \|a_{ij}(x)\| \neq 0$.

3°**.** Теореми 4.1 і 4.2 можна вважати основними теоремами теорії $2F$-планарних відображень основного типу псевдоріманових просторів з абсолютно паралельною f-структурою, оскільки вони дають регулярний метод, який дозволяє для будь-якого такого простору (V_n, g_{ij}, F_i^h) або знайти всі псевдоріманові простори $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$, на які V_n допускає $2F$ПВ основного типу, або довести, що таких просторів немає. Однак слід визнати, що при великих n безпосереднє розв'язування цієї задачі може виявитися технічно досить складним.

Література

[1] Raad Kadem. О $2F$-планарных отображениях пространств аффинной связности. *Abstracts of the Colloquium on Differential Geometry, Eger, Hungary*, pages 20–25, 1989.

[2] Josef Mikeš, Alena Vanžurová, Irena Hinterleitner. *Geodesic mappings and some generalizations*. Palacký University Olomouc, Faculty of Science, Olomouc, 2009.

[3] Kentaro Yano. On a structure defined by a tensor field f of type (1, 1) satisfying $f^3+f=0$. *Tensor (N.S.)*, 14:99–109, 1963, doi: 10.1016/S0304-0208(08)72251-5.

[4] Н. Г. Коновенко, И. Н. Курбатова. Специальные классы псевдоримановых пространств с f-структурой, допускающих $2F$-планарные отображения. *Proc. Intern. Geom. Center*, 11(4):18–33, 2018, doi: 10.15673/tmgc.v11i4.1304.

[5] Н.Г. Коновенко, И.Н. Курбатова, Е. Цвентух. $2F$-планарные отображения псевдоримановых пространств с f-структурой. *Proc. Intern. Geom. Center*, 11(1):39–51, 2018, doi: 10.15673/tmgc.v11i1.918.

[6] Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* М.:Наука: Москва, 1979.

[7] А.П. Широков. Структуры на дифференцируемых многообразиях. *Итоги науки. Сер. Мат. Алгебра. Топол. Геом. 1967*, pages 127–188, 1969.

Надійшла до редакції 22 листопада 2019, прийнята до друку 17 січня 2020.

Курбатова І. М.
ОНУ, Одеса, Україна
Email: irina.kurbatova27@gmail.com
ORCID: orcid.org/0000-0003-0215-6060

Коновенко Н. Г.
ОНАХТ, Одеса, Україна
Email: konovenko@ukr.net
ORCID: orcid.org/0000-0002-8631-0688