Proc. Intern. Geom. Center 2009 **2**(3) 53–59 $d\omega$

Геометрия риманова пространства второго приближения

С. М. Покась, А. В. Крутоголова

Аннотация Для риманова пространства ненулевой постоянной кривизны V_n построено приближение второго порядка - пространство $\widetilde{V}^2_n$. Доказано, что $\widetilde{V}^2_n$ является субпроективным пространством В. Ф. Кагана. В явном виде получено выражение компонент вектора Киллинга пространства $\widetilde{V}^2_n$.

Ключевые слова Субпроективное риманово пространство, группа Ли движений.

УДК 514.7

1. Римановы пространства второго приближения

Рассмотрим риманово пространство V_n, отнесенное к произвольной системе координат $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$ с метрическим тензором $g_{ij}(x)$. Зафиксируем в этом пространстве точку $M_0(x^h_0)$ и построим новое пространство $\widetilde{V}^2_n$, определдив его метрический тензор $\widetilde{g}_{ij}(y)$ следующим образом ([1]):

$$\widetilde{g}_{ij}(y) = \underset{\circ}{g_{ij}} + \frac{1}{3} \underset{\circ}{R_{i\alpha\beta j}} \, y^\alpha y^\beta, \tag{1.1}$$

где $\underset{\circ}{g_{ij}} = g_{ij}(M_0), \quad \underset{\circ}{R_{i\alpha\beta j}} = R_{i\alpha\beta j}(M_0)$.

В дальнейшем формулы вида (1.1) будем записывать в виде:

$$\widetilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} y^\alpha y^\beta,$$

считая, что объекты исходного пространства V_n вычислены в точке M_0.

Если в V_n перейти к римановой системе координат с началом в точке M_0 и разложить метрический тензор $g_{ij}(x)$ в ряд Тейлора в окрестности данной точки, то можно убедиться, что пространство $\widetilde{V}_n^2$ реализует приближение второго порядка для V_n и потому отражает его геометрические свойства с определенной степенью точности ([2]).

Для эффективного изучения свойств пространства $\widetilde{V}_n^2$ понадобятся $g^{ij}(y)$ - элементы обратной матрицы для матрицы $||\widetilde{g}_{ij}||$ с элементами (1.1). Согласно Лемме 1 ([3]):

$$\widetilde{g}^{ij}(y) = g^{ij} + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p t^{(p)ij}, \tag{1.2}$$

где

$$\begin{gathered} t_k^h = \tfrac{1}{3}R^h_{\cdot l_1 l_2 k} y^{l_1} y^{l_2}, \\ t^{ij} = t^i_\alpha g^{\alpha j}, \\ t_k^{(p)h} = t_\alpha^{(p-1)h} t_k^\alpha, \quad p = 2, 3, \ldots \end{gathered} \tag{1.3}$$

Ряды (1.2) сходятся абсолютно и равномерно на множестве

$$|R^h_{\cdot l_1 l_2 k} y^{l_1} y^{l_2}| \leq \frac{3c}{n} \quad (c < 1)$$

Рассмотрим случай, когда исходное пространство V_n является пространством ненулевой постоянной кривизны K. Известно ([4]), что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$R^h_{\cdot ijp} = K(g_{ip}\delta^h_j - g_{ij}\delta^h_p) \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.3), получаем

$$\begin{gathered} t_p^h = \tfrac{K}{3}(g_{l_1 p}\delta^h_{l_2} - g_{l_1 l_2}\delta^h_p) y^{l_1} y^{l_2}, \\ t_p^{(2)h} = -A t_p^h, \\ t_p^{(3)h} = A^2 t_p^h, \\ \ldots, \\ t_p^{(m)h} = (-1)^{m+1} A^{m-1} t_p^h, \\ m = 4, 5, \ldots \end{gathered} \tag{1.5}$$

где

$$A = \frac{K}{3} g_{l_1 l_2} y^{l_1} y^{l_2} \tag{1.6}$$

Подставляя (1.5) в (1.2), находим

$$\widetilde{g}^{ij} = g^{ij} - t^{ij} \sum_{p=1}^{\infty} A^p \tag{1.7}$$

Так как $|t_p^h| \leq \dfrac{c}{n}$, то $|\dfrac{K}{3}(g_{l_1 p}\delta_{l_2}^h - g_{l_1 l_2}\delta_p^h)y^{l_1}y^{l_2}| \leq \dfrac{c}{n}$.

Просуммировав последнее соотношение по индексам h и p, получаем

$$|\frac{K}{3}g_{l_1 l_2}y^{l_1}y^{l_2}| \leq \frac{c}{n(n-1)} < 1$$

или

$$|A| < 1,$$

поэтому $\sum\limits_{p=1}^{\infty} A^p = \dfrac{A}{1-A}$ как сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а соотношение (1.7) принимает вид

$$\widetilde{g}^{ij}(y) = \frac{g^{ij} - \dfrac{K}{3}y^i y^j}{1 - \dfrac{K}{3}g_{\alpha\beta}y^\alpha y^\beta} \tag{1.8}$$

Из формул (1.1) и (1.8) легко получить выражения для символов Кристоффеля I и II рода пространства $\widetilde{V}_n^2$:

$$\widetilde{\Gamma}_{ij,p}(y) = -\frac{1}{3}R_{p(ij)l}y^l$$

или

$$\widetilde{\Gamma}_{ij,p}(y) = \frac{K}{3}(2g_{ij}g_{pl} - g_{l(i}g_{j)p})y^l, \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}_{ij}^h(y) = \tfrac{K}{3(1-A)}\Big[\Big(2g_{ij}\delta_l^h - g_{l(i}\delta_{j)}^h\Big)\, y^l - \\ - \frac{2K}{3}\left(g_{ij}g_{l_1 l_2} - g_{il_1}g_{jl_2}\right)y^{l_1}y^{l_2}y^h\Big].\end{aligned} \tag{1.10}$$

На основании (1.10) компоненты тензора Римана пространства $\widetilde{V}_n^2$ имеют вид:

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{\cdot ijp}^h(y) = \tfrac{K(4A-3)}{3(A-1)}(g_{ip}\delta_j^h - g_{ij}\delta_p^h) + \\ + \frac{2K^2}{9(A-1)}(g_{ij}g_{pl_1} - g_{ip}g_{jl_1})y^{l_1}y^h + \\ + \frac{K^2(4A-5)}{9(A-1)^2}(g_{jl_1}\delta_p^h - g_{pl_1}\delta_j^h)g_{il_2}y^{l_1}y^{l_2}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Просуммировав (1.11) по индексам h и p, приняв во внимание (1.1) и (1.4), получаем компоненты тензора Риччи пространства $\widetilde{V}_n^2$:

$$\widetilde{R}_{ij}(y) = \rho_1\widetilde{g}_{ij}(y) + \rho_2\widetilde{\lambda}_i\widetilde{\lambda}_j, \tag{1.12}$$

где

$$\widetilde{\lambda}_i = g_{ij} y^l, \tag{1.13}$$

а $\rho_1(y)$ и $\rho_2(y)$ - некоторые функции, зависящие от $y^1, y^2, \ldots, y^n$.

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что:

1) тензор конформной кривизны $\widetilde{C}^h_{\cdot ijp}(y)$ пространства $\widetilde{V}^2_n$ тождественно равен нулю:

$$\widetilde{C}^h_{\cdot ijp}(y) = 0 \tag{1.14}$$

2)

$$\widetilde{\lambda}_i \widetilde{\lambda}_j \widetilde{g}^{ij}(y) = g_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta \neq 0 \tag{1.15}$$

Известно ([5]), что условиями (1.14), (1.15) и (1.12) определяются субпроективные пространства В. Ф. Кагана основного случая. Т.о. доказано утверждение.

Теорема 1 *Приближение второго порядка для риманова пространства ненулевой постоянной кривизны является субпроективным пространством основного случая.*

2. Инфинитезимальные движения в пространстве второго приближения для риманова пространства ненулевой постоянной кривизны

1. Известно ([1]), что в $\widetilde{V}^2_n$ существует аналитический вектор Киллинга $\widetilde{\xi}^h(y)$ вида

$$\widetilde{\xi}^h(y) = \sum_{p=0}^{\infty} \underset{p}{a}^h, \tag{2.1}$$

где

$$\underset{p}{a}^h = a^h_{\cdot l_1 \ldots l_p} y^{l_1} \cdot \ldots \cdot y^{l_p}, \quad \underset{\circ}{a}^h = a^h_{\cdot} \tag{2.2}$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\underset{2p}{a}^h = \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1} a^\alpha t^{(p)h}_{\ \ \alpha} \tag{2.3}$$

$$\underset{2p+1}{a^h_{\cdot}} = 0 \tag{2.4}$$

$$a^\alpha_{\cdot(i} g_{j)\alpha} = 0 \tag{2.5}$$

$$a^{\alpha}_{\cdot(i}R_{j)(l_1l_2)\alpha} + a^{\alpha}_{\cdot(l_1}R_{l_2)(ij)\alpha} = 0 \tag{2.6}$$

$$\underset{2p-1}{a^{\alpha}_{\cdot(i}}\ t_{j)\alpha} + \underset{2p}{a_{\alpha}}\,\mu^{\alpha}_{ij} = 0 \tag{2.7}$$

$$(p = 1, 2, ...)$$

Здесь $\mu^h_{ij} = \frac{1}{3}R^h_{\cdot(ij)l}y^l$, t^i_j и $t^{(p)i}_j$ определяются формулами (1.3).

Подставив (1.4) в (2.6), убеждаемся в том, что (2.6) выполняются тождественно для любых $a^h_{\cdot p}$, удовлетворяющих условиям (2.5).

Рассмотрим уравнения (2.7) при $p = 1$:

$$\begin{gathered} a^{\alpha}\Big[R_{\alpha(il_1)\beta}R^{\beta}_{\cdot(l_2l_3)j} + R_{\alpha(il_2)\beta}R^{\beta}_{\cdot(l_3l_1)j} + R_{\alpha(il_3)\beta}R^{\beta}_{\cdot(l_1l_2)j} + \\ + R_{\alpha(jl_1)\beta}R^{\beta}_{\cdot(l_2l_3)i} + R_{\alpha(jl_2)\beta}R^{\beta}_{\cdot(l_3l_1)i} + R_{\alpha(jl_3)\beta}R^{\beta}_{\cdot(l_1l_2)i} + \\ + R_{\alpha(l_1l_2)\beta}R^{\beta}_{\cdot(ij)l_3} + R_{\alpha(l_2l_3)\beta}R^{\beta}_{\cdot(ij)l_1} + R_{\alpha(l_3l_1)\beta}R^{\beta}_{\cdot(ij)l_2}\Big] = 0 \end{gathered} \tag{2.8}$$

Уравнения (2.8) свернем с $g^{il_1}g^{l_2l_3}$ и в результат подставим (1.4). Получим

$$a^j = 0 \tag{2.9}$$

Очевидно, что последующие уравнения из системы (2.7) выполняются тождественно на основании (2.9). Поэтому из (2.2) получаем:

$$\widetilde{\xi}^h = a^h_{\cdot l}y^l, \tag{2.10}$$

где $a^h_{\cdot l}$ удовлетворяют условиям (2.5). Т.о. приходим к группе линейных однородных движений:

$$\begin{gathered} y'^h = y^l\left[\delta^h_l + \textstyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}t^p a^{(p)h}_{\cdot\ \ l}\right] \\ (a^{(p)h}_{\cdot\ \ l} = a^h_{\alpha}a^{(p-1)\alpha}_{\cdot\ \ \ \ \ l}, \quad p = 2, 3, \ldots) \end{gathered} \tag{2.11}$$

Покажем, что ряды $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p!}t^p a^{(p)h}_{\cdot\ \ l}$ сходятся абсолютно и равномерно для t, которое изменяется на любом ограниченном множестве.

Действительно, введем следующие обозначения:

$$Max\{|a^h_{\cdot l}t|\} = \frac{c}{n}(c = const)$$

Тогда справедливы следующие оценки

$$|a^{(2)h}_{.l}t^2| \leq |a^h_{.l}t| \cdot |a^1_{.l}t| + |a^h_{.2}t| \cdot |a^2_{.l}t| + \ldots +$$
$$+ \ldots + |a^h_{.n}t| \cdot |a^n_{.l}t| \leq \frac{c^2}{n},$$

$$|a^{(3)h}_{.l}t^3| \leq \tfrac{c^3}{n},$$
$$\ldots$$
$$|a^{(p)h}_{.l}t^p| \leq \frac{c^p}{n}, p = 4, 5, \ldots$$

Поэтому ряды $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} t^p a^{(p)}{}^h_l$, которые мажорируются сходящимся числовым рядом $\sum\limits_{p=1}^{\infty} \frac{c^p}{p!} = e^p$, сходятся абсолютно и равномерно для t, изменяющемся на любом ограниченном множестве.

Т.к. порядок группы определяется максимальным числом независимых $a^h_{.l}$, удовлетворяющих (2.5), то приходим к теореме.

Теорема 2 *Пространство второго приближения $\widetilde{V}^2_n$ для пространства ненулевой постоянной кривизны допускает группу линейных однородных движений G_r порядка $r = \dfrac{n(n-1)}{2}$.*

Список литературы

1. Покась С.М.: Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения. Известия Пензенского государственного университета имени В.Г. Белинского, физико-математические науки, №26, 2011, стр. 173-183
2. Петров А.З.: Новые методы в теории относительности. М, Наука, 1966.
3. А. В. Крутоголова, С. М. Покась, Л. Г. Цехмейструк "Индуцированные отображения римановых пространств второго приближения"Математичні студії Т41, №2, 2014, стр. 220-224
4. Эйзенхарт Л.П.: Риманова геометрия. М, ИЛ, 1948.
5. Каган В. Ф.: Субпроективные пространства. М, физматгиз, 1961.
6. Эйзенхарт Л.П.: Непрерывные группы преобразований. М, ИЛ, 1947.

С. М. Покась, А. В. Крутоголова

Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, кафедра геометрии и топологии, Одесса, Украина

E-mail: pokas@onu.edu.ua, 01link01@rambler.ru

Sergey M. Pokas, Alina V. Krutogolova

Geometry of Riemannian space of the second approximation

For the Riemannian space of non-zero constant curvature V_n we have constructed the space of the second-order approximation $\widetilde{V}_n^2$. We have proved that $\widetilde{V}_n^2$ is a subprojective space of V. F. Khagan. Also we have obtained an expression of components of the Killing's vector in an explicit form.