



УДК 004.92

# МОДИФІКАЦІЯ КОСИНУС-КВАДРАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ВІДБИТТЯ СВІТЛА ДЛЯ РЕНДЕРИНГУ ТРИВИМІРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

## MODIFICATION OF COSINE-QUADRATIC LIGHT REFLECTION MODEL FOR THREE-DIMENSIONAL IMAGES RENDERING

Завальнюк С. К.<sup>1</sup>, Романюк О. Н.<sup>2</sup>, Котлик С.В.<sup>3</sup>Zavalniuk Y. K.<sup>1</sup>, Romanyuk O. N.<sup>2</sup>, Kotlyk S.V.<sup>3</sup><sup>1,2</sup>Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна<sup>3</sup>Одеський національний технологічний університет, Одеса, Україна<sup>1,2</sup>Vinnitsia National Technical University, Vinnitsia, Ukraine<sup>3</sup>Odesa National University of Technology, Odesa, UkraineORCID: <https://orcid.org/0009-0005-1202-4653><sup>1</sup>, <https://orcid.org/0000-0002-2245-3364><sup>2</sup>,<https://orcid.org/0000-0001-5365-12003><sup>3</sup>E-mail: [qq9272627@gmail.com](mailto:qq9272627@gmail.com)<sup>1</sup>, [rom8591@gmail.com](mailto:rom8591@gmail.com)<sup>2</sup>, [sergknet@gmail.com](mailto:sergknet@gmail.com)<sup>3</sup>

Copyright © 2025 by author and the journal “Automation of technological and business – processes”.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>

DOI: 10.15673/atbp.v17i2.3149

**Анотація.** У статті розглянуто розробку модифікованої косинус-квадратичної моделі відбиття світла для рендерингу тривимірних зображень. Розглянуто визначення двопроменевої функції відбивної здатності, що використовується для моделювання відбиття світла від поверхні, та її необхідні властивості, що включають невід'ємність, відповідність принципу симетричності Гельмгольца та закону збереження енергії. Проаналізовано фізично-точні моделі Кука-Торренса та Хе, що базуються на фізичній теорії відбиття світла. Додатково, досліджено особливості застосування моделей відбиття світла на основі даних. Розглянуто недоліки використання фізично-точних моделей відбиття і моделей на основі даних у високопродуктивних системах тривимірного рендерингу. Проаналізовано переваги й недоліки основних емпіричних моделей відбиття світла, а також необхідність апроксимації еталонної емпіричної моделі Блінна-Фонга. Встановлено, що наявні апроксимаційні моделі Блінна-Фонга, такі як косинус-квадратична модель відбиття світла, не дозволяють достатньо якісно відтворити відблиски на поверхні тривимірного об'єкта. Обґрунтовано необхідність розробки нових апроксимаційних виразів моделі Блінна-Фонга для підвищення реалістичності формування зображень у режимі реального часу. Запропоновано модифіковану косинус-квадратичну модель відбиття світла, що забезпечує суттєве підвищення точності відтворення відблисків у зонах епіцентру та блюмінгу порівняно з оригінальною косинус-квадратичною моделлю. Модель розроблено на основі однієї з форм косинус-квадратичної моделі освітлення, що містить параметр управління формою відблиску. При цьому, вираз модифікованої моделі не вміщує затратні операції. Побудовано графіки, що відображають відносні та абсолютні похибки запропонованої моделі від моделі відбиття світла Блінна-Фонга. Для забезпечення відповідності модифікованої косинус-квадратичної моделі відбиття світла закону збереження енергії, модель доповнено розрахованим нормуючим коефіцієнтом. Запропонована модель відбиття світла є енергетично-коректною та забезпечує високопродуктивне формування тривимірних зображень.

**Abstract.** In the article, it is discussed the development of a modified cosine-quadratic light reflectance model for three-dimensional images rendering. It is analyzed the definition of bidirectional reflectance distribution function, which is used for modelling the reflection of light from surface, and its necessary features that include non-negativity, compliance with Helmholtz reciprocity principle and compliance with energy conservation law. The physically-based Cook-Torrance and He models, which are based on the physical theory of light reflection, are analyzed. Additionally, the key aspects of applying the data-driven light reflection models are investigated. The disadvantages of physically-based and data-driven models usage in highly-productive three-dimensional rendering systems are considered. The advantages and disadvantages of main empirical light reflection models and the necessity of approximating the reference empirical Blinn-Phong model are analyzed. It is determined that the existing approximate Blinn-Phong models, such as cosine-quadratic light reflection model, don't allow to reproduce with a sufficient quality the glares at the three-dimensional object's surface. It is justified the necessity of development of a new approximate Blinn-Phong model expression in order



to increase the realism of image formation in real-time mode. It is proposed a new modified cosine-quadratic light reflection model, which provides an essential increase in the accuracy of glares reproduction in the epicenter and blooming zones in comparison with the original cosine-quadratic model. The model is developed based on one of the cosine-quadratic reflection model forms, which contains the parameter for managing the form of the glare. At the same time, the expression of the modified model doesn't contain the computationally expensive operations. The plots, which show the relative and absolute errors of the proposed model from the Blinn-Phong reflection models, are built. In order to provide the compliance of the modified cosine-quadratic light reflection model with the energy conservation law, the model is augmented with the calculated normalizing coefficient. The proposed light reflection model is energetically-correct and provides a highly-productive formation of three-dimensional images.

**Ключові слова:** модель відбиття світла, двопроменева функція відбивної здатності, косинус-квадратична двопроменева функція відбивної здатності, модель Фонга, закон збереження енергії.

**Keywords:** light reflection model, bidirectional reflectance distribution function, cosine-quadratic bidirectional reflectance distribution function, Phong model, energy conservation law.

**Вступ.** Етап зафарбовування є найбільш обчислювально складним етапом графічного конвеєра. Для визначення інтенсивності кольору [1] у кожній точці зображення враховуються оптичні та геометричні властивості поверхні, взаємне положення векторів падіння та відбиття світла, особливості джерела світла.

Вимоги до реалістичності формування тривимірних зображень і складність полігональних моделей об'єктів постійно зростають, що ускладнює можливість візуалізації сцен у режимі реального часу. Тому актуальним є використання високопродуктивних моделей відбиття світла від поверхонь.

Наявні високопродуктивні моделі освітлення не завжди дозволяють відтворити з достатньою точністю візуальні особливості об'єктів 3d-сцен. Отже, необхідною є розробка нових високопродуктивних моделей відбиття світла, що забезпечать високоточне формування відблисків на поверхнях об'єктів.

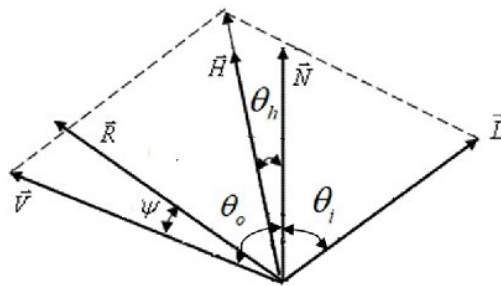
**Аналіз літературних даних і постановка проблеми.** Двопроменева функція відбивної здатності (ДФВЗ, англ. – bidirectional reflectance distribution function (BRDF)) є радіометричною функцією, що визначає особливості відбиття світла від точки поверхні у напрямку  $\vec{V}$  відносно напрямку  $\vec{L}$ .

ДФВЗ ( $f_r(\vec{L}, \vec{V})$ ) [2-4] визначається як відношення вихідної енергетичної яскравості до вхідної опроміненості

$$f_r(\vec{L}, \vec{V}) = \frac{dL_r(\vec{V})}{dE_i(\vec{L})},$$

де  $L_r$  – вихідна енергетична яскравість у напрямку відбиття світла до спостерігача  $\vec{V}$ ,  $E_i$  – вхідна опроміненість у напрямку падіння світла  $\vec{L}$ .

На рис. 1 наведено основні вектори та кути [5], що використовуються при обчисленні ДФВЗ.  $\vec{N}$  є нормаллю до точки поверхні,  $\vec{H}$  – середнім вектором між  $\vec{L}$  і  $\vec{V}$  ( $\vec{H} = (\vec{L} + \vec{V}) / |\vec{L} + \vec{V}|$ ),  $\vec{R}$  – вектором дзеркального відбиття світла ( $\vec{R} = 2(\vec{L} \times \vec{N}) \times \vec{N} - \vec{L}$ ).  $\alpha_o$  є кутом між  $\vec{V}$  і  $\vec{N}$ ,  $\alpha_i$  – кутом між  $\vec{L}$  і  $\vec{N}$ ,  $\gamma$  – кутом між  $\vec{V}$  і  $\vec{R}$ ,  $\alpha_h$  – кутом між  $\vec{N}$  і  $\vec{H}$ .



**Рис. 1. Основні вектори та кути для розрахунку ДФВЗ**

**Fig. 1. Main vectors and angles for BRDF calculation**

ДФВЗ характеризується рядом необхідних властивостей [2]:

1. Функція повинна мати невід'ємне [2] значення -  $f_r(\vec{L}, \vec{V}) \geq 0$ .
2. Функція повинна відповідати принципу симетричності Гельмгольца [2], згідно із яким значення функції не змінюється при взаємозаміні вхідного та вихідних напрямків освітлення -  $f_r(\vec{L}, \vec{V}) = f_r(\vec{V}, \vec{L})$ .
3. Функція повинна відповідати закону збереження енергії – розсіяна над поверхнею енергія світла не може перевищувати кількість вхідної світлової енергії. Умова математично виражається як [6, 7]

$$\int_w \partial f_r(\vec{L}, \vec{V}) \cos(\alpha_o) d\omega \leq 1,$$

де  $d\omega$  – диференціальний тілесний кут, у межах якого падає світло,  $w$  – верхня напівсфера.

ДФВЗ, що відповідають усім трьом умовам, називаються фізично-коректними.

ДФВЗ поділяються на три основні групи [2]: емпіричні ДФВЗ, фізично-точні ДФВЗ і ДФВЗ на основі даних.



Емпіричні ДФВЗ [2] полягають у наближеному поданні вимірних відбивних властивостей матеріалів за допомогою простих формул. Через простоту обчислення емпіричні ДФВЗ характеризуються значним поширенням у системах високопродуктивного тривимірного рендерингу.

Серед емпіричних ДФВЗ відомою є ДФВЗ Фонга [8, 9], що обчислюється згідно з виразом

$$\cos(\gamma)^n,$$

де  $\gamma$  – кут між  $\vec{V}$  і вектором дзеркального відбиття  $\vec{R}$ ,  $n$  – коефіцієнт спекулярності поверхні, що визначає концентрацію відблиску залежно від особливостей поверхні об'єкта.

Для забезпечення дотримання закону збереження енергії ДФВЗ Фонга доповнюється нормуючим коефіцієнтом [10, 11]  $(n+2)/2n$ .

ДФВЗ Блінна [6, 12] полягає у вдосконаленні ДФВЗ Фонга шляхом заміни кута  $\gamma$  на кут  $q_n$  між нормаллю  $\vec{N}$  та серединним вектором  $\vec{H}$ . Це забезпечує більш продуктивне обчислення моделі. Нормуючий коефіцієнт ДФВЗ Блінна обчислюється згідно із виразом [10]  $((n+2)(n+4))/(8n(2^{n/2}+n))$ .

Водночас, ДФВЗ Фонга та Блінна потребують піднесення значення кута до степеня  $n \hat{=} [1,1000]$ , що призводить до суттєвого підвищення трудомісткості їх обчислення.

Тому використовуються апроксимаційні вирази ДФВЗ Фонга та ДФВЗ Блінна.

Одним із апроксимаційних виразів ДФВЗ Блінна та Фонга другого степеня є косинус-квадратична ДФВЗ ( $f_2$ ) [13]. Косинус-квадратична дистрибутивна функція обчислюється згідно з формулою [13]

$$f_2 = \frac{\pi}{\xi^2} (\cos(x) - 1) + 1 \frac{\sigma^2}{\theta},$$

де  $x = \gamma$  або  $q_n$ .

Однак, рівень точності апроксимації еталонної функції у зонах епіцентру та згущання відблиску є недостатньо високим.

Більш точну апроксимацію ДФВЗ Блінна та Фонга забезпечує інший варіант косинус-квадратичної функції ( $f_Q$ ) [13], що базується на використанні параметра  $Q$ .  $Q$  відповідає визначеному рівню осі ординат ДФВЗ.  $f_Q$  розраховується за формулою [13]

$$f_Q = \frac{\pi \sqrt{Q} - 1}{\xi \frac{m(Q)}{e^n - 1}} (\cos(x) - 1) + 1 \frac{\sigma^2}{\theta}.$$

Недоліками даної дистрибутивної функції є наявність у множині трудомістких операцій ділення, обчислення квадратного кореня, піднесення до степеня.

Фізично-точні ДФВЗ [2], на відміну від емпіричних, базуються на фізичній теорії взаємодії світла з поверхнею об'єкта. У фізично-точних ДФВЗ, як правило, враховуються шорсткість поверхні, розподіл дзеркальних мікроділянок (мікрофасет) поверхні, взаємне маскування й затінення мікрофасет, довжина хвилі світла, коефіцієнт заломлення матеріалу. У результаті, забезпечується більш точне моделювання відбиття світла від поверхні.

Значна частина фізично-точних ДФВЗ базується на ДФВЗ Кука-Торренса. В основі ДФВЗ Кука-Торренса [14–17] лежить використання функції розподілу мікрофасет поверхні  $D$ , функції ослаблення світла  $G$ , коефіцієнта Френеля  $F$ . Функція розподілу мікрофасет  $D$  визначає, яка частка мікрофасет поверхні може відбивати світло у напрямку до спостерігача. Функція ослаблення світла  $G$  забезпечує врахування взаємного маскування та затінення між мікрофасетами. Коефіцієнт Френеля  $F$  визначає, яка частка світла відбивається залежно від кута падіння світла та коефіцієнта заломлення матеріалу. ДФВЗ Кука-Торренса обчислюється згідно з формулою [14-17]

$$\frac{DFG}{4 \cos(q_i) \cos(q_o)}$$

Зокрема, на ДФВЗ Кука-Торренса базується одна із набору ДФВЗ Бреді [5], призначена для металічних поверхонь

$$\frac{DG}{a^{-2} b^{-2} \tan(q_h)^2 + 0.9994},$$

де  $a, b$  – параметри керування формою спекулярної пелюстки.

Більш складною є фізично-точна модель Хе [18], що враховує теорію дифракції Кірхгофа. Модель поєднує три компоненти: спекулярного відбиття  $sp$ , направлено-дифузного відбиття  $dd$ , одноманітно-дифузного відбиття  $ud$ . Компоненти моделі обчислюються згідно з формулами [18]



$$r_{sp} = \frac{|F|^2 e^{-g} S}{\cos(q_i) dW} D,$$

$$r_{dd} = \frac{\dot{A} S}{\cos(q_i) \cos(q_o)} \frac{t^2}{16\rho} \sum_{m=1}^y \frac{g^m e^{-g}}{m! m} \exp\left(-\frac{v_{xy}^2 t^2}{4m}\right),$$

$$r_{ud} = a(l),$$

де  $g$  - функція ефективної шорсткості поверхні,  $S$  - функція затінення,  $D$  - дельта-функція,  $\dot{A}$  - функція на основі коефіцієнтів Френеля,  $t$  - автокореляційна довжина,  $m$  - індекс для знаходження суми,  $v_{xy}$  - функція зміни вектора хвилі,  $l$  - довжина хвилі,  $a(l)$  - параметр багаторазово відбитого чи міжповерхнево розсіяного світла.

Отже, фізично-точні ДФВЗ, попри високу точність подання особливостей відбиття світла, є обчислювально складними. Тому їх застосування у системах рендерингу, що функціонують у реальному часі, є обмеженим.

ДФВЗ на основі даних [2] полягають у формуванні великих таблиць вимірних даних відбивних здатностей матеріалів і застосуванні до них технік зменшення розмірності. Класичною моделлю відбиття на основі даних є модель Матусіка [2]. Моделі даного типу є обчислювально складними, потребують значних обсягів пам'яті та проведення складних вимірювальних процедур. Відповідно, ДФВЗ на основі даних доцільно застосовувати лише під час офлайн-рендерингу тривимірних зображень (наприклад, під час розробки анімаційних фільмів).

Отже, для формування тривимірних зображень прийнятної якості у режимі реального часу доцільно використовувати емпіричні ДФВЗ. Однак, існуючі емпіричні моделі характеризуються рядом недоліків: наявністю трудомістких операцій, що ускладнюють апаратну реалізацію, невідповідністю закону збереження енергії, недостатньою точністю відтворення відблисків поверхонь об'єктів.

Тому актуальною є розробка нових і модифікація існуючих емпіричних двопробеневих функцій відбивної здатності.

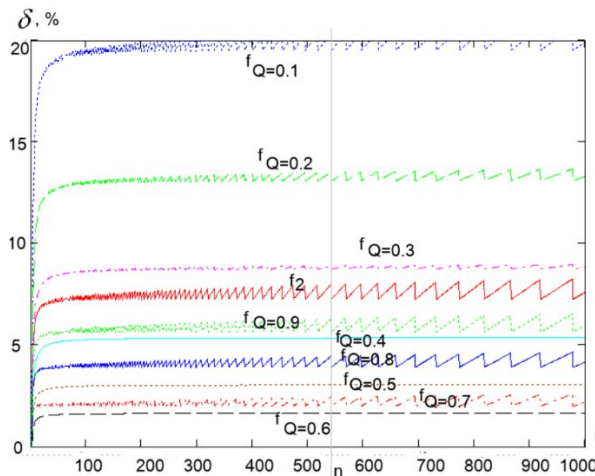
**Мета і завдання дослідження.** Метою роботи є модифікація косинус-квадратичної двопробеневої функції відбивної здатності для підвищення точності відтворення відблисків при збереженні високої продуктивності формування зображень.

**Методи і матеріали досліджень.** Під час дослідження було використано методи диференціального й інтегрального числення, комп'ютерного моделювання та машинного навчання. Для обчислення й побудови графіків відносних і абсолютних похибок ДФВЗ було використано програмний засіб Mathcad 2001. Для застосування алгоритмів символічної регресії під час підбору нормуючого коефіцієнта розробленої ДФВЗ було використано програмний засіб TuringBot.

**Результати досліджень.** Спростимо апроксимаційний вираз ( $f_Q$ ) ДФВЗ Блінна-Фонга ( $f_b$ )

$$f_Q = \frac{\frac{\alpha \sqrt{Q} - 1}{e^{\frac{\ln(Q)}{n}} - 1} \left( \cos(x) - 1 \right) + 1}{\frac{\sigma^2}{\theta}}$$

Визначимо рівень  $Q$ , що забезпечить найбільш точну апроксимацію еталонної ДФВЗ Блінна-Фонга у зоні епіцентру відблиску при прийнятній точності апроксимації у зоні блюмінгу.



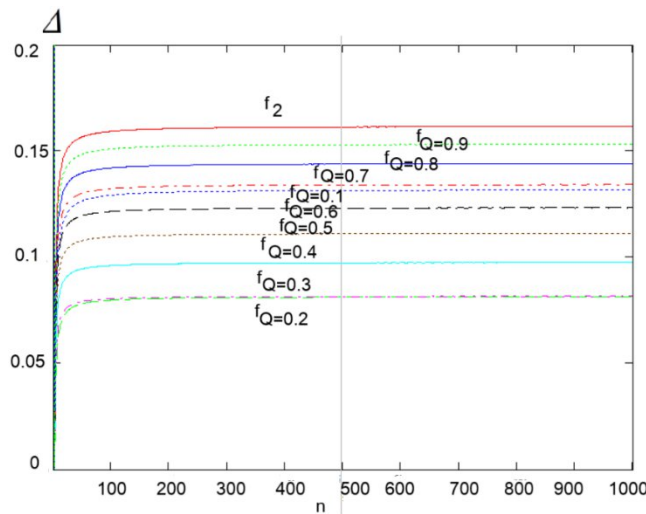
**Рис. 2.** Максимальні  $d$   $f_Q, f_2$  від  $f_b$  у зоні епіцентру відблиску залежно від значення  $Q$

**Fig. 2.** Maximum  $d$  of  $f_Q, f_2$  from  $f_b$  in glare's epicenter zone relative to  $Q$  value

На рис. 2 наведено графіки максимальних відносних похибок  $d$   $f_Q, f_2$  від  $f_b$  у зоні епіцентру відблиску залежно від значень  $Q, n \in [2, 1000]$ .



На рис. 3 зображено графіки максимальних абсолютних похибок  $D f_Q, f_2$  від  $f_b$  залежно від значень  $Q, n \in [2, 1000]$ .



**Рис. 3. Максимальні  $D f_Q, f_2$  від  $f_b$  залежно від значення  $Q$**

**Fig. 3. Maximum  $D f_Q, f_2$  from  $f_b$  relative to  $Q$  value**

Як показано на рис. 2, найбільш точна апроксимація  $f_b$  у зоні епіцентру відблиску досягається при  $Q \gg 0.6$ . Шляхом подальшої підстановки у вираз  $f_Q$  значень  $Q$ , наближених до  $0.6$ , підібрано більш точне значення  $Q = 0.64$  ( $d = 1.255\%$ ).

Максимальна абсолютна похибка  $f_Q$  ( $Q = 0.64$ ) від  $f_b$  відповідає зоні блюмінгу відблиску. На рис. 3 показано, що максимальна  $D f_Q$  ( $Q = 0.64$ ) від  $f_b$  є меншою, ніж максимальна  $D f_2$  від  $f_b$  та є прийнятною.

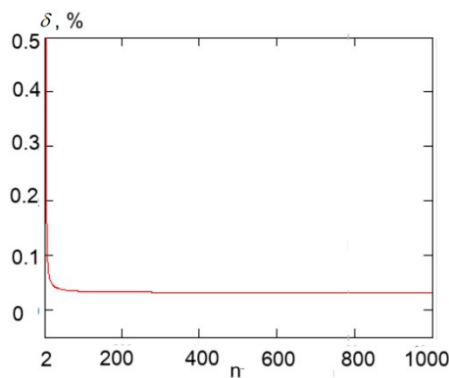
Отже, оптимальним значенням  $Q$  є  $0.64$ .

Для підвищення продуктивності обчислення  $f_Q$  апроксимуємо множник  $(\sqrt{0.64} - 1) / (e^{\frac{\ln(0.64)}{n}} - 1)$  лінійним виразом за допомогою лінійної регресії.

У результаті, спрощений вираз  $f_Q$  (позначимо  $f_{Q2}$ ) обчислюється згідно з виразом

$$f_{Q2} = ((0.448n + 0.099) \times (\cos(x) - 1) + 1)^2.$$

Відносна похибка  $d$  апроксимації оригінального коефіцієнта виразу  $f_Q$  не перевищує  $0.5\%$  (рис. 4).



**Рис. 4. Графік відносної похибки апроксимації оригінального коефіцієнта виразу  $f_Q$**

**Fig. 4. Plot of relative error of  $f_Q$ 's original coefficient approximation**

На рис. 5 наведено графіки  $f_{Q2}, f_2, f_b$  при  $n = 20$ .

Отже,  $f_{Q2}$  забезпечує більш точну апроксимацію  $f_b$  у зонах епіцентру відблиску та затухання порівняно з  $f_2$ .

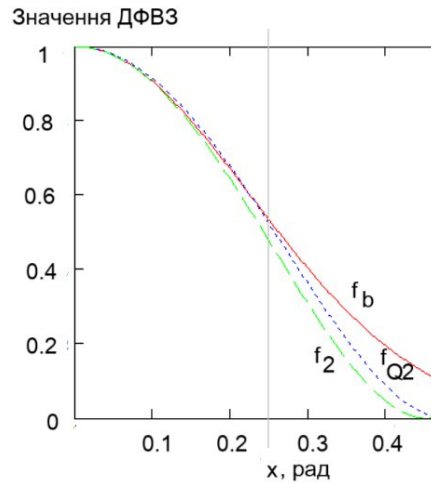


Рис. 5. Графіки  $f_{Q2}, f_2, f_b$

Fig. 5. Plots of  $f_{Q2}, f_2, f_b$

На рис. 6(а) показано, що максимальна  $d$   $f_{Q2}$  від  $f_b$  у зоні епіцентру відблиску відносно  $n \in [2, 1000]$  становить 1.256%, максимальна  $D$   $f_{Q2}$  від  $f_b$  - 0.128 (рис. 6(б)). Отже, спрощення множника  $f_Q$  суттєво не вплинуло на точність апроксимації  $f_b$ .

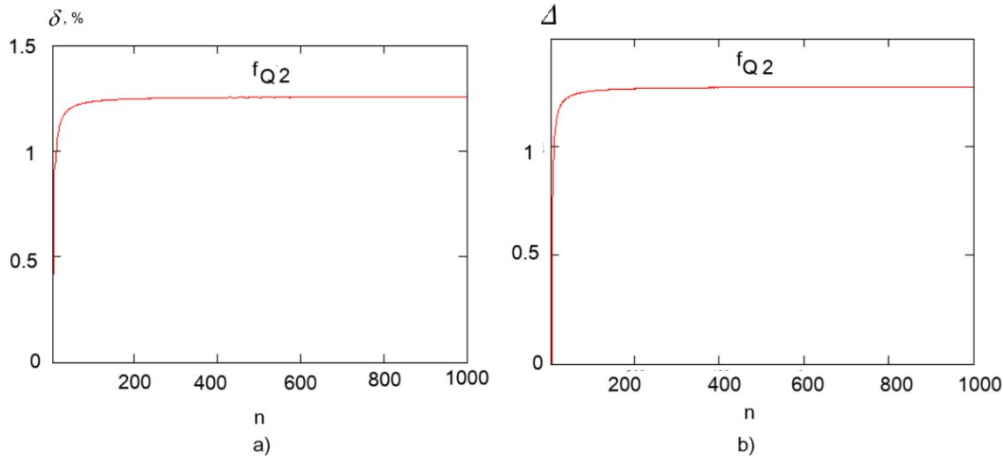


Рис. 6. Максимальні відносні похибки у зоні епіцентру відблиску (а) та максимальні абсолютні (б) похибки між  $f_{Q2}$  і  $f_b$

Fig. 6. Maximum relative errors in glare's epicenter zone (a) and maximum absolute errors (b) between  $f_{Q2}$  and  $f_b$

Даний вираз не є енергетично-коректним, оскільки не відповідає закону збереження енергії. Тому, обчислимо нормуючий коефіцієнт  $coef(n)$  для  $f_{Q2}$ , де  $x$  - кут у між  $V$  і  $R$ .

Враховуючи умову максимізації відбитої енергії,  $\vec{R} \cdot \vec{N} = \vec{N} \cdot \vec{N}$ , запишемо умову дотримання закону збереження енергії у вигляді рівняння [8, 10]

$$coef(n) \int_w \left( (0.448n + 0.099) (\cos(\gamma) - 1) + 1 \right)^2 \cos(\gamma) d\omega = 1.$$

Переходимо до сферичної системи координат й інтегруємо підінтегральний вираз по змінній  $j$

$$\begin{aligned} coef(n) \int_0^{2\pi} \int_0^{gran(n)} \left( (0.448n + 0.099) (\cos(\gamma) - 1) + 1 \right)^2 \cos(\gamma) \sin(\gamma) d\gamma dj &= \\ = coef(n) \int_0^{gran(n)} \left( (0.448n + 0.099) (\cos(\gamma) - 1) + 1 \right)^2 \cos(\gamma) \sin(\gamma) d\gamma &= 1, \end{aligned}$$

де  $gran(n)$  - координата перетину  $f_{Q2}$  з віссю абсцис, що обчислюється за формулою  $a \cos\left(\frac{448n - 901}{448n + 99}\right)$ .

Позначимо підінтегральний вираз як  $Int(n)$ . Рівняння набуває виду

$$coef(n) \int_0^{gran(n)} Int(n) d\gamma = 1.$$



Знайдемо формулу  $coef(n)$ .

Відносно усіх значень  $n \in [2, 1000]$  обчислюємо значення виразу  $1 / (2 \times \text{Ant}(n))$ . Вибірку з 50 пар значень  $n \in [2, 1000]$  і  $1 / (2 \times \text{Ant}(n))$  збережемо у текстовому файлі (рис. 7).

```
newenergy.txt
n, y
2, 0.634
3, 0.833
4, 1.04
5, 1.25
6, 1.462
7, 1.674
8, 1.887
9, 2.099
10, 2.313
```

Рис. 7. Збережена у текстовому файлі вибірка ідеальних значень  $coef(n)$

Fig. 7. Saved in text file sample of ideal  $coef(n)$  values

За допомогою програми TuringBot, що реалізує алгоритми символічної регресії, підберемо формулу відносно створеного набору даних.

У якості метрики похибки апроксимації набору даних встановлюємо Root Mean Square (рис. 8). Обираємо можливі операції формули: додавання, множення, ділення.

The screenshot shows the TuringBot configuration window. The 'Input file' is 'newenergy.txt', 'Target variable' is 'y', and 'Input variables' is 'n'. Under 'Search options', 'Search metric' is set to 'RMS error', 'Train/test split' is 'No cross-validation', and 'Test sample' is 'Chosen randomly'. Under 'Basic functions', 'Addition', 'Multiplication', and 'Division' are all checked.

Рис. 8. Налаштування підбору формули  $coef(n)$  у TuringBot

Fig. 8. Setting the selection of  $coef(n)$  formula in TuringBot

У результаті, отримуємо набір можливих виразів обчислення  $coef(n)$  різної складності (рис. 9)

Solutions		
Size	Error	Function
1	66,453671	48.259
3	0,140034	0.214159*n
5	0,006715	0.213896*(0.807175+n)
10	0,000476	0.213905*n+0.166262+(0.0763269/n)
12	0,000286	0.213904*(0.779213+((0.308609/(n-0.326302))+n))

Рис. 9. Можливі вирази обчислення  $coef(n)$ , отримані у TuringBot

Fig. 9. Possible calculation expressions of  $coef(n)$ , obtained in TuringBot

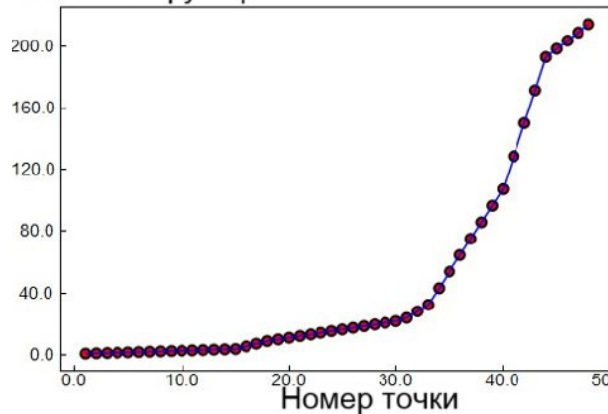
Враховуючи низьку похибку RMS (0.0067) і відносно незначну складність, для обчислення  $coef(n)$  обрано формулу



$$coef(n) = 0.214(0.807 + n).$$

На рис. 10 наведено графік апроксимації виразом  $coef(n)$  значень сформованого набору даних

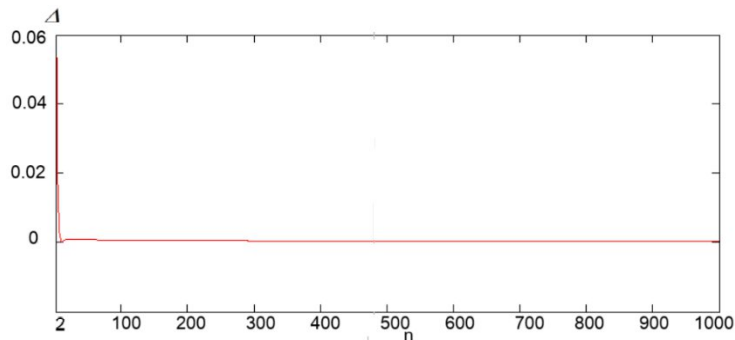
**Значення функції**



**Рис. 10. Графік апроксимації виразом  $coef(n)$  сформованого набору даних**

**Fig. 10. Plot of approximation of the formed dataset by the  $coef(n)$  expression**

На рис. 11 наведено графік абсолютних відхилень напівсферичної інтегральної відбивної здатності поверхні ( $coef(n) \times 2 \times \Delta n(n)$ ) від 1 відносно  $n \in [2, 1000]$



**Рис. 11. Графік абсолютних відхилень напівсферичної інтегральної відбивної здатності від 1**

**Fig. 11. Plot of absolute deviations between hemispherical integral reflectivity and 1**

Максимальне абсолютне відхилення напівсферичної інтегральної відбивної здатності поверхні від 1 відносно  $n \in [2, 1000]$  становить  $53 \times 10^{-3}$ .

**Обговорення результатів.** Модифіковану косинус-квадратичну ДФВЗ  $f_{Q2}$  було отримано шляхом підбору оптимального значення параметра  $Q$  для  $f_Q$  і подальшого спрощення виразу. Отриманий вираз  $f_{Q2}$ , на відміну від  $f_Q$ , не містить трудомісткі операції ділення та обчислення квадратного кореня.

Запропонована функція  $f_{Q2}$  характеризується зменшенням максимальної  $D$  апроксимації еталонної функції  $f_b$  у зоні епіцентру відблиску із 7.924% до 1.256% порівняно з  $f_2$ .

Також, зменшено максимальну  $D$  апроксимації  $f_b$  з 0.162 до 0.128 порівняно з  $f_2$ . При цьому, максимальна  $D$  апроксимації  $f_b$  відповідає зоні затухання відблиску.

Шляхом обчислення нормуючого коефіцієнта забезпечено відповідність функції закону збереження енергії. Отже,  $f_{Q2}$  є енергетично-коректною ДФВЗ.

**Висновки.**

У статті запропоновано модифіковану косинус-квадратичну двопробеневу функцію відбивної здатності. Модифікована функція забезпечує підвищення точності відтворення епіцентру відблиску у 6.3 рази порівняно з оригінальною косинус-квадратичною функцією. Окрім того, забезпечується підвищення точності відтворення зони затухання відблиску.

Запропонована функція є високопродуктивною та відповідає закону збереження енергії. Функція призначена для формування високореалістичних графічних зображень у високопродуктивних системах тривимірного рендерингу.

**Список використаних джерел**

1. Романюк О. Н., Романюк О. В., Чехмestрук Р. Ю. Комп'ютерна графіка. Вінниця : ВНТУ, 2023. 147 с.
2. Zhou Y. An overview of BRDF models in computer graphics. *Theoretical and Natural Science*. 2023. Vol. 19, no. 1. P. 205–210.
3. New surface reflectance model with the combination of two cubic functions usage / O. Romanyuk, Y. Zavalniuk, S. Pavlov, R. Chekhmestruk, Z. Bondarenko, T. Koval, A. Kalizhanova, A. Iskakova. *Informatyka, Automatyka, Pomiar w Gospodarce i Ochronie Środowiska*. 2023. Vol. 13, no. 3. P. 101–106.
4. Relationship between topographic parameters and BRDF for tungsten surfaces in the visible spectrum / M. Le Bohec et al. *Optik*. 2024. Vol. 303. Art. no. 171750.
5. Романюк О. Н., Завальнюк Є. К., Бобко О. Л. Аналіз нових моделей освітлення на основі двопробеневиx функцій відбивної здатності. *Україна та світ: сучасні парадигми розвитку суспільства*. Харків, 2024. С. 16–39.
6. BxDF material acquisition, representation, and rendering for VR and design / G. C. Guarnera et al. *SA '19: SIGGRAPH Asia 2019*, Brisbane, Queensland, Australia, 2019 / ACM, 2019. P. 1-17.
7. Identification of BRDF parameters with spectral measurements in the visible light spectrum towards solar irradiation evaluation in urban environment for photovoltaic technologies / B. Raybaud et al. *Energy and Buildings*. 2022. Vol. 263. Art. no. 112034.
8. The Development of Physically Correct Reflectance Model Based on Logarithm Function / O. Romanyuk, Y. Zavalniuk, O. Romanyuk, A. Snigur, N. Titova, V. Maidaniuk. *2023 13th International Conference on Advanced Computer Information Technologies (ACIT)*, Wrocław, Poland, 21–23 September 2023 / IEEE, 2023. P.483-487.
9. Simulation research on the reflection characteristics of typical microspheres for remote sensing targets / X. Yu et al. *International Conference on Remote Sensing Technology and Survey Mapping (RSTSM 2024)*, Changchun, China, 12–14 January 2024 / ed. by H. Sohrabi, T. K. Lohani. SPIE, 2024. Art. no. 131660.
10. Giesen F. Phong Normalization Factor derivation. *Farbrausch.de*. URL: <https://www.farbrausch.de/~fg/stuff/phong.pdf> (date of access: 28.03.2025).
11. Development of LiDAR Measurement Simulator Considering Target Surface Reflection / Y. Nakajima et al. *Proc. 8th European Conference on Space Debris*, Darmstadt, 20–23 April 2021 / ESA Space Debris Office, 2021. P. 20–23.
12. Optical system visualization of combined reflectance model based on cubic and quadratic functions / O. Romanyuk, Y. Zavalniuk, N. Titova, O. Kaduk, W. Wójcik, M. Kalimoldayev, Z. Shermantayeva. *Optical Fibers and Their Applications 2023*, Lublin, Poland, 11–14 September 2023 / ed. by Z. Omiotek, A. Smolarz, W. Wójcik. SPIE, 2023. Art. no. 129850C.
13. Романюк А., Lyashenko Y. The BRDF Models Based on the Cosine-quadratic Function. *10th international conference on development and application systems*, Suceava, 27–29 May 2010 / Stefan cel Mare University of Suceava, 2010. P. 390–394.
14. Li X., Feng J., Liu J. Color Reproduction of Chinese Painting Under Multi-Angle Light Source Based on BRDF. *Photonics*. 2024. Vol. 11, no. 11. Art. no. 1089.
15. Investigation and Simulation of Diffraction on Rough Surfaces / O. Clausen et al. *Computer Graphics Forum*. 2023. Vol. 42, no. 1. P. 245–260.
16. Reflection modeling of rough metal surfaces using statistical theory / S. Li et al. *Optical Engineering*. 2024. Vol. 63, no. 11. Art. no. 114102.
17. Rhee C.-H., Lee C. H. Estimating Physically-Based Reflectance Parameters From a Single Image With GAN-Guided CNN. *IEEE Access*. 2022. Vol. 10. P. 13259–13269.
18. A comprehensive physical model for light reflection / X. D. He et al. *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*. 1991. Vol. 25, no. 4. P. 175–186.

**References**

1. O. N. Romanyuk, O. V. Romanyuk, та R. Y. Chekhmestruk, *Kompiuterna hrafika*. Vinnytsia: VNTU, 2023.
2. Y. Zhou, “An overview of BRDF models in computer graphics”, *Theor. Natural Sci.*, vol. 19, № 1, pp. 205–210, December 2023.
3. O. Romanyuk, Y. Zavalniuk, S. Pavlov, R. Chekhmestruk, Z. Bondarenko, T. Koval, A. Kalizhanova, and A. Iskakova, “New surface reflectance model with the combination of two cubic functions usage”, *Inform., Autom., Pomiar w Gospod. i Ochr. Srodowiska*, vol. 13, № 3, pp. 101–106, September 2023.
4. M. Le Bohec et al., “Relationship between topographic parameters and BRDF for tungsten surfaces in the visible spectrum”, *Optik*, vol. 303, May 2024, Art.no. 171750.
5. O N. Romanyuk, Y. K. Zavalniuk, та O. L. Bobko, “Analiz novykh modelei osvittlenia na osnovi dvopromenevykh funktsii vidbyvnoi zdatnosti”, u *Ukraina ta svit: suchasni paradyhmy rozvytku suspilstva*. Kharkiv: SG NTM «Novyi kurs», 2024, s. 16–39.
6. G. C. Guarnera, D. Guarnera, G. J. Ward, M. Glencross, and I. Hall, “BxDF material acquisition, representation, and rendering for VR and design”, in *SA '19*, Brisbane, Queensland, Australia, 2019, pp. 1-17.
7. B. Raybaud, E. Vergnault, A. Disdier, P. Thony, and J.-J. Roux, “Identification of BRDF parameters with spectral measurements in the visible light spectrum towards solar irradiation evaluation in urban environment for photovoltaic technologies”, *Energy Build.*, vol. 263, May 2022, Art. no. 112034.



8. O. Romanyuk, Y. Zavalniuk, O. Romanyuk, A. Snigur, N. Titova, and V. Maidaniuk, “The Development of Physically Correct Reflectance Model Based on Logarithm Function”, in *2023 13th Int. Conf. Adv. Comput. Inf. Technol. (ACIT)*, Wrocław, Poland, 2023, pp. 483-487.
9. X. Yu, T. Wu, J. Yi, and Y. Tan, “Simulation research on the reflection characteristics of typical microspheres for remote sensing targets”, in *Int. Conf. Remote Sens. Technol. Surv. Mapping (RSTSM 2024)*, Changchun, China, 2024, Art. no. 131660.
10. F. Giesen. “Phong Normalization Factor derivation”. Farbrausch.de. Accessed on: March 28, 2025. [Online]. Available: <https://www.farbrausch.de/~fg/stuff/phong.pdf>
11. Y. Nakajima, T. Sasaki, N. Okada, and T. Yamamoto, “Development of LiDAR Measurement Simulator Considering Target Surface Reflection”, in *Proc. 8th Eur. Conf. Space Debris*, Darmstadt, Germany, 2021, pp. 20–23.
12. O. Romanyuk, Y. Zavalniuk, N. Titova, O. Kaduk, W. Wójcik, M. Kalimoldayev, and Z. Shermantayeva, “Optical system visualization of combined reflectance model based on cubic and quadratic functions”, in *Opt. Fibers Their Appl. 2023*, Lublin, Poland, 2023, Art. no. 129850C.
13. A. Романуку, and Y. Lyashenko, “The BRDF Models Based on the Cosine-quadratic Function”, in *10th Int. Conf. DEVELOP. APPLICATION SYST.*, Suceava, Romania, 2010, pp. 390–394.
14. X. Li, J. Feng, and J. Liu, “Color Reproduction of Chinese Painting Under Multi-Angle Light Source Based on BRDF”, *Photonics*, vol. 11, № 11, November 2024, Art. no. 1089.
15. O. Clausen, Y. Chen, A. Fuhrmann, and R. Marroquim, “Investigation and Simulation of Diffraction on Rough Surfaces”, *Comput. Graph. Forum*, vol. 42, № 1, pp. 245–260, 2023.
16. S. Li, Z. Liu, X. Xiong, and Y. Liu, “Reflection modeling of rough metal surfaces using statistical theory”, *Opt. Eng.*, vol. 63, № 11, November 2024, Art. no. 114102.
17. C.-H. Rhee, and C. H. Lee, “Estimating Physically-Based Reflectance Parameters From a Single Image With GAN-Guided CNN”, *IEEE Access*, vol. 10, pp. 13259–13269, 2022.
18. X. D. He, K. E. Torrance, F. X. Sillion, and D. P. Greenberg, “A comprehensive physical model for light reflection”, *ACM SIGGRAPH Comput. Graph.*, vol. 25, № 4, pp. 175–186, July 1991.

Отримана в редакції 15.05.2025. Прийнята до друку 10.06.2025. Received 15 May 2025. Approved 10 June 2025.  
Available in Internet 30 June 2025